SzA XIII. gyakorlat

Lineáris kongruenciák, továbbá absztrakt algebrát akarunk alkalmazni

2011. november 29.

Hasznos tudnivalók

- Wilson-tétel

$$(n-1)! \equiv \begin{cases} -1 \pmod{n} & \text{ha } n \text{ prím} \\ 2 \pmod{n} & \text{ha } n = 4 \\ 0 \pmod{n} & \text{ha } n > 4 \text{ összetett} \end{cases}$$

- $a \cdot x \equiv b \pmod{m}$ lineáris kongruenciának
  - $\exists$ megoldása $\Leftrightarrow$ $(a, m) \mid b$
  - $\exists$ megoldása $\Leftrightarrow$ $(a, m) \pmod{m}$ megoldása létezik
- $(G, *)$ félcsoport, ha $*$ G-n zárt és asszociatív.
- $(G, *)$ csoport, ha félcsoport, $\exists$ e egységelem és $\forall g \in G$ $\exists$ g^{-1} inverz.
- $(G, *)$ Abel-csoport, ha csoport és $*$ kommutatív.

Feladatok

1. $1998! + 111^{1998} \equiv x \pmod{1999}$
2. $15x \equiv 3 \pmod{18}$
3. Csoportot alkotnak-e az alábbi H halmazok a megadott műveletekre?
   (a) $H = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$, a művelet pedig az összeadás.
   (b) $H = \mathbb{Z}$ az egész számok halmaza, a művelet pedig az osztás.
   (c) $H = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza, a művelet pedig a hatványozás.
   (d) $H = \mathbb{Z}^+$ a pozitív egész számok halmaza, a művelet pedig a hatványozás.
   (e) H egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza, a művelet a halmazok szimmetrikus differenciája. Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája alatt az $A \triangle B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ halmazt értjük. összeadás.

---

4. Mi az alábbi lineáris kongruenciák megoldása?
   (a) $8x \equiv 3 \pmod{21}$
   (b) $9x \equiv 24 \pmod{96}$
5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímszámra:

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}$$

6. A $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ halmazon az alábbi táblázatokban látható műveleteket értelmezzük.

$+$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$
$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$

$*$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$
$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$
$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$

   (a) $((\spadesuit * \diamondsuit) + \clubsuit) * (\spadesuit + \diamondsuit) = ?$
   (b) Ezek a műveletek asszociatívak? Kommutatívak? Van egységelemük?
   (c) Oldjuk meg a következő egyenletet: $(\heartsuit * x) + \diamondsuit = \diamondsuit$!
   (d) Mit alkotnak ezek a műveletek az adott halmazzal? (semmit/félcsoportot/csoportot/Abel-csoportot)

7. Csoportot alkotnak-e az alábbi H halmazok a megadott műveletekre?

   (a) $H = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza, a művelet pedig a hagyományos szorzás.
   (b) $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ahol $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza, a művelet pedig a következő: $a * b = 2ab$, ahol a jobboldalon a hagyományos szorzás szerepel.
   (c) $H = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$, a művelet pedig az összeadás.
   (d) $H = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$, a művelet pedig a szorzás.
   (e) $H = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$, a művelet pedig a szorzás.
   (f) H a $\pmod{m}$ szerint vett teljes maradékrendszer ($H = \{0, 1, \ldots m - 1\}$), a művelet pedig a maradékosztályokon értelmezett összeadás.

8. Legyen G olyan csoport, ahol $a^2 = e$ teljesül minden $a \in G$ elemre. Bizonyítsuk be, hogy G Abel-csoport!

9. Egy G csoportban minden $a, b \in G$ elempárra teljesül, hogy $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G Abel-csoport!