SzA X. gyakorlat kiegészítő feladatok

1. **[ZH 2009. november 23.] Egy 12 csúcsú konvex poliédernek 10 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?**
   A poliédert felfoghatjuk egy síkbarajzolható gráfként, ahol $n = 12$ és $t = 10$. A konkrét síkbarajzoláshoz elkészíthetjük a duálisát, ahol $n^* = t = 10$ és $e^* = e$. Mivel az eredeti gráfban minden tartományt ugyanannyi él határol, ezért a duálisban minden pontból ugyannyi él indul ki, vagyis minden fokszám megegyezik, azaz a duális egy d^*-reguláris gráf. Innentől felírhatunk néhány egyenletet, használva a szokásos formulákat (és ahonnan a fentiek alapján d^*-ot keressük):

   $$\begin{aligned} n + t &= e + 2 \\ n^* \cdot d^* &= 2 \cdot e^* \end{aligned}$$

   Behelyettesítve, és az azonos értékeket azonosan jelölve:

   $$\begin{aligned} 12 + 10 &= e + 2 \\ 10 \cdot d^* &= 2 \cdot e \end{aligned}$$

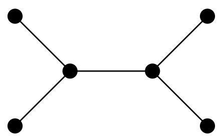
   ahonnan $e = 20$, és $d^* = 4$, feltéve, hogy nem számoltam el semmit. Tehát a poliéder minden lapjának 4 oldala van.

2. **Bizonyítsuk be, hogy minden n pontú gráfra $\chi(G) \leq 1 + n - \alpha(G)$!**
   Független pontok mindig színezhetők egy színnel (persze nem biztos, hogy így a színezés optimális lesz, de ez most minket nem zavar), tehát egy maximális független ponthalmaznak adjuk a piros színt! A maradék $n - \alpha(G)$ pont közül mindegyiket színezzük különbözőre, így $1 + n - \alpha(G)$ (piros + összes többi) színnel helyesen kiszíneztük a gráfot, vagyis többre biztos nincs szükség.

3. **Legyen G olyan (irányítatlan) gráf, melynek kromatikus száma k. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon!**
   A színeknek definiáljuk egy sorrendjét! Ez lehet pl. a színek indexe. Vegyük a gráf k-színnel való színezését, majd irányítsuk úgy az éleket, hogy mindig a kisebb sorszámúból a nagyobb sorszámúval színezett csúcsba mutasson! Egyenlőség a jó színezés miatt nem állhat elő. Ebben az esetben minden, a gráfban lévő irányított útban a csúcsok színei folyamatosan növekednek, így mivel legfeljebb k színt használhatunk, egy irányított út is legfeljebb k hosszú lehet.

4. **Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges egyszerű G gráfra $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$!**
   Az egy színnel színezett pontok egy jó színezésben biztos, hogy függetlenek, ezért egy szín legfeljebb $\alpha(G)$ csúcsnak lehet a színe. Mivel minden pont ki van színezve, és $\chi(G)$ színünk van, ezért $\chi(G)\alpha(G) \geq |V(G)|$, ez pedig maga az állítás.

5. **Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan $\chi(G)$ színnel való színezése, melyben az egyik színosztály pontosan $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?**
   Nem, egy ellenpélda lehet a következő, ahol a 4 elsőfokú csúcsot azonos színűre színezve a gráfot nem lehet két színnel színezni, pedig a kromatikus száma 2.



6. **Adjuk példát minden $k \geq 2$ pozitív egész esetén olyan G_k gráfra, melynek kromatikus száma 2, de megadható a csúcsainak olyan sorrendje, hogy azokat e sorrendben színezve k színt fogunk használni! (G_k-nak tetszőleges számú csúcsa és éle lehet, mi választhatjuk meg.)**
Legyen ez a gráf $K_{k,k}$ annyi módosítással, hogy az egymással szemben levő csúcsok között töröljünk az élet! Ekkor ha kiszínezzük az első csúcsot pirosra, utána a mohó algoritmusnak odaadjuk a vele szemben lévő csúcsot, akkor azt is pirosra fogja színezni. Ez a csúcs viszont össze van kötve az összes többi másik osztálybelivel, így a piros színt többet nem használhatjuk. A többi csúcsra ugyanezt elvégezve pont k színt fog használni a mohó algoritmus (esetleg indukcióval pontosabban is be lehet látni), de ez a gráf továbbra is páros, tehát kromatikus száma 2.

7. **Legyen G olyan gráf, melynek kromatikus száma k. Legyen $A \subseteq V(G)$ a csúcsok egy olyan részhalmaza, melyben tetszőleges két pont távolsága legalább négy (két pont távolsága a közöttük vezető utak közül a minimális élszámú). Mutassuk meg, hogy az A-beli csúcsok tetszőleges $k+1$ színnel való színezése kiterjeszthető az egész G gráf $k+1$ színnel való színezésévé! (Kiterjesztésen azt értjük, hogy a keresett színezésnél az A-beli csúcsok a megadott $(k+1)$-színezésük szerinti színt kapják.)**
Nem írom le a teljes megoldást, elég macerás. A lényeg az, hogy színezzük ki k színnel a gráfot! A kimaradó szín legyen piros. Az előre megadott ($k+1$ színt használó) A színezését nézzük végig! Ahol az igényelt és az ott szereplő szín megegyezik, ott nem csinálunk semmit, ahol nem egyezik meg, azt átszínezzük az igényeltre. Ha van olyan szomszédja, ami így ütközik vele, azt átszínezzük pirosra. Ezután már csak azt kell megmutatni, hogy az így létrejövő színezés jó lesz. A lényeg az, hogy mivel a megadott csúcsok között nagy a távolság, az ő pirosra színezésük egymással nem fog ütközni.

8. **G egy összefüggő, egyszerű irányított gráf, melynek van olyan mélységi bejárása, amelynek során keletkezett feszítőerdő csupa izolált pontból áll. Az ilyen n pontú gráfok közül hogy néz ki a minimális, illetve a maximális élszámú?**
Összefüggőség miatt fánál kevesebb él nem jöhet szóba, az $n-1$ hosszú út (a bejárás során „visszafele” haladva) pont jó. A maximális élszámúhoz meg kell gondolni, hogy DAG-nak kell lennie (irányított kör elrontaná az izoláltságot minden bejárásnál, ugyanis lenne visszaél, lásd tétel), tehát írjuk fel a topolgikus sorrendben a pontokat, és ha minden lehetséges előrefele mutató élet behúzunk (azaz az i csúcsból vezet irányított él minden $i+1 \ldots n$ csúcsba), akkor még pont jók vagyunk, többet a minden lehetségesnél meg nem tudunk behúzni.