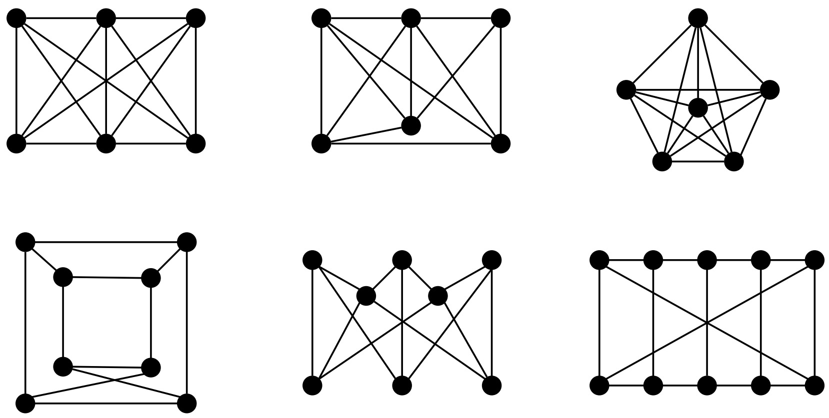
SzA X. gyakorlat

Gráfokat színezünk és rajzolunk, valamint PERT

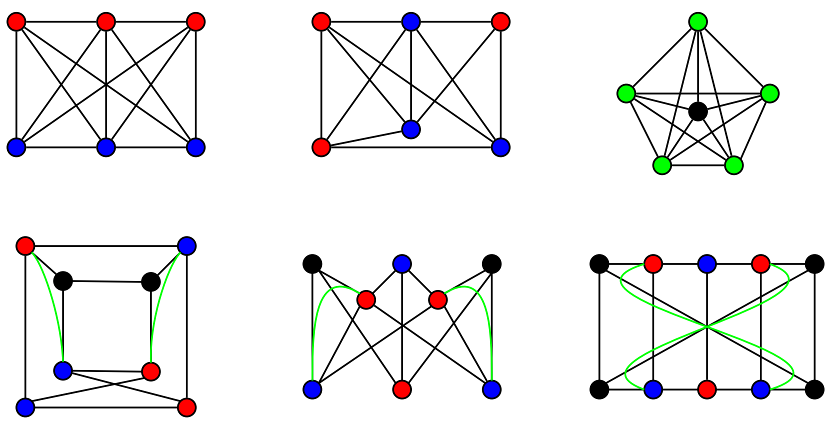
2011. november 8.

1. **Legyen G 100-reguláris gráf 2001 ponton. Határozzuk meg $\chi_e(G)$ értékét!**
   Tfh $\chi_e(G) = \Delta(G) = 100$. Ekkor mivel reguláris a gráf, minden csúcsnál meg kell jelennie mind a 100 színnek. Ekkor pl. a piros élek viszont pont egy teljes párosítást alkotnának, ami a csúcsok páratlan száma miatt lehetetlen, tehát $\chi_e(G) = \Delta(G) + 1 = 101$ (Vizing-tétel!).

3. **Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?**



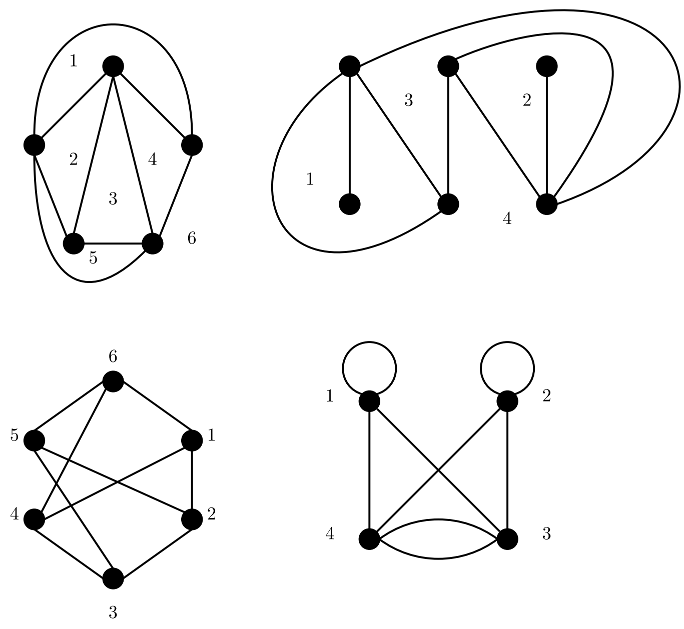
   Egyik sem, egy kivételével mindegyikben egy $K_{3,3}$ bújik meg. Pirossal vannak jelölve a házak, kékkel a kutak, zölddel pedig az összevonásokkal képződő élek.



4. **Hány csúcsa van egy összefüggő, 4-reguláris síkgráfnak, ha síkbarajzolásakor 10 tartomány keletkezik?**
   Az Euler-formula ($n + t = e + 2$) és az ismert $\sum d_i = 2e$ képlet alapján $n = 8$.

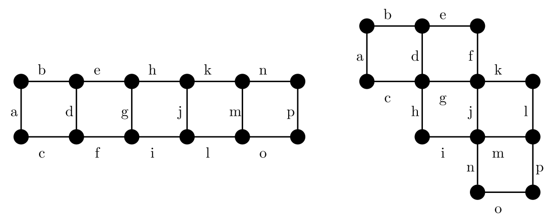
5. **Mutassuk meg, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6!**
   Síkbarajzolható egyszerű gráfok esetén $e \leq 3n - 6$, és ebben az esetben $n\delta(G) \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2e$, de tudjuk, hogy $\delta(G) = 6$, tehát $e \geq 3n$, ami ellentmondás.
   Rossz gondolat, ha esetleg K_6 létét szeretnénk bizonyítani... Elég ezoterikus, de ami rosszabb: helytelen bizonyítás jönne ki belőle. Gondoljunk csak a $K_{6,6}$-ra.

6. **Készítsük el az alábbi gráfok duálisát!**

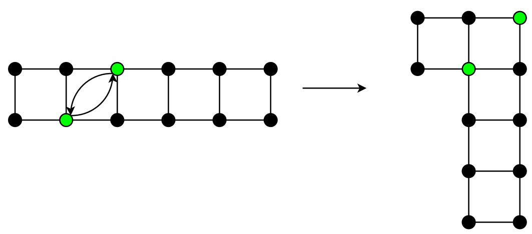


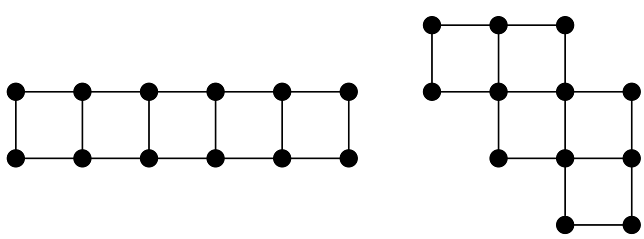
Az ábrán látható. Szorgalmasabbak eleve síkba is rajzolhatják őket.

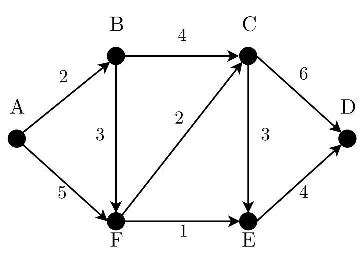
7. **Gyengén izomorf-e az alábbi bal oldali a két gráf?**



Igen, egy megfeleltetés az élek között az ábrán látható. Whitney-tételek alapján is meg lehet csinálni, a következőhöz hasonló lépéseket felhasználva:







8. **Határozzuk meg a PERT-módszer segítségével a fenti jobb oldali tevékenységekhez szükséges összidőt, és a kritikus tevékenységeket!**

Topologikus sorrend (emeletek): $ABFCED$. Idők: $A : 0, B : 2, F : 5, C : 7, E : 10, D : 14$, és mindegyik kritikus. (Ez csak a végeredmény, bővebben könyv, előadás, gyakorlat.)

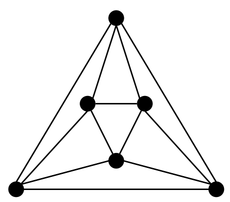
---

9. **G csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos G-ben, ha egymásból bástyával egy lépésben elérhetők. Mennyi G kromatikus száma?**
   Az egy sorhoz (vagy oszlophoz) tartozó csúcsok K_8-at alkotnak, tehát biztos, hogy $\chi(G) \geq 8$. 8 szín viszont elég is, az alábbi egy jó színezés:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & \vdots & & & \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{matrix}$$

10. **[PZH 2008. december 5.] Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges 3-kromatikus, 100 csúcsú G gráfnak van 67 olyan csúcsa, amik páros gráfot feszítenek.**
    Legyen a zöld szín az, amelyikből a legkevesebb van. Ha elhagyjuk a zöld pontokat, akkor a maradék gráf két színnel színezhető, tehát páros. A skatulya elvet felhasználva zöldből legfeljebb 33 lehet, tehát a maradék páros gráfnak legalább $100 - 33 = 67$ csúcsa van.

11. **[ZH 2009. november 23.] A G gráfot úgy kaptuk, hogy a 6 pontú teljes gráfból elhagytunk három független (vagyis pontdiszjunkt) élt. Síkbarajzolható-e ez a G gráf? *(Ha igen, rajzoljuk le keresztezés nélkül, csupa egyenes szakasszal, ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be!)***
    Magyarul: egy K_6-ból elhagytunk egy teljes párosítást. Mindenféle szimmetriaokokból ezt csak egyféleképpen tehetjük meg. A keletkezett gráfban $e = 15-3 = 12$. Síkbarajzolható (ezt megtippeltük), akinek segít, t-t is kiszámolhatja az Euler-formulával. Egy megoldás pl:



12. **Legyen G egy 20 pontú, összefüggő, 3-reguláris síkgráf. Hány pontja van G duálisának, G^*-nak?**
    A duális pontjainak száma pont G tartományainak számával lesz egyenlő, ami az Euler-formula alapján 12.

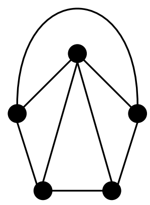
13. **Egy nemzetközi konferencián 5 ország egy-egy képviselője ül asztalhoz. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos! (Feltételezhetjük, hogy a világ nem tórusz alakú, valamint nincsenek exklávék.)**
    Feleltessünk meg egy gráfban minden országnak egy csúcsot, és akkor legyen összekötve két csúcs, ha a két ország szomszédos egymással. Ennek a gráfnak

síkbarajzolhatónak kell lennie. Ha viszont mindenki szomszédos lenne mindenkivel, akkor a gráf nem lenne síkbarajzolható, mert K_5 lenne.

14. **Rajzoltam egy n csúcsú fát, de elveszítettem. Rajzoljuk le a duálisát!**
Egy pont, $n-1$ hurokéllel. Ez azért van így, mert a fában nincs kör, tehát egy tartománya van, továbbá az $n-1$ él mindegyike ezen egy tartomány között fut.

15. **Adjunk meg egy olyan G_1 és G_2 gráfokat, hogy adott lerajzolás szerint $G_1 \cong (G_1^*)^*$ és $G_2 \ncong (G_2^*)^*$!**
Pl. a 6-os feladatból bármelyik gráf, valamint a következő feladatból a gráf.

16. **Mutassunk egy olyan egyszerű G gráfot, melynek 5 pontja van, és izomorf a duálisával!**



17. **Milyen a teljes gráf mélységi bejárása?**
Egy n hosszú út.

18. **[ZH 2008. november 17] Határozzuk meg mindazon egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható G gráfokat, amiknek létezik olyan G^* duálisuk, hogy $G \cong G^*$ teljesül, továbbá $e = n+2$ áll, ahol e a G éleinek, n pedig G csúcsainak számát jelöli.**
Az izomorfia miatt $n^* = n$, a duális definíciója miatt pedig $n^* = t$, tehát az Euler-formula, az előzőek, és a feltétel alapján $n+t = e+2 = n+n = n+2+2$, ahonnan $n = 4$ és $e = 6$. Mivel egyszerű gráfról van szó, ezért nem lehetnek többszörös- és hurokélek, a K_4-nek pedig pont 6 éle van, így ha létezik ilyen gráf, akkor az csak a K_4 lehet. K_4-et síkbarajzolva és elkészítve a duálisát láthatjuk, hogy jé, tényleg izomorfak.

19. **[ZH 2009. november 23.] Egy 12 csúcsú konvex poliédernek 10 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?**
A konvex poliéder élhálója pont egy síkbarajzolható gráfnak felel meg. Ennek a gráfnak a duálisában a pontok fokszáma viszont pont a nekik megfelelő lapok oldalszámával egyezik meg. Azaz: $n = 12$, $t = n^* = 10$, $e^* = e = n+t-2 = 20$, $\sum d^* = 2e^*$, $\sum d^* = n^* d^*$, fentieket rendezve, kiszámolva a $d^* = 4$, vagyis a keresett szám 4.

20. **[PZH 2008. december 5] Tegyük fel, hogy G olyan síkbarajzolható, egyszerű gráf, amibe nem tudunk további élt húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával. Igazoljuk, hogy ha G^* a G duálisa, akkor G^* 3-reguláris.**
Ha a duálisban van másod- vagy elsőfokú pont, akkor az eredeti gráf nem egyszerű (másodfokú: párhuzamos élek, elsőfokú: hurokél). Ha van 3-nál magasabb d fokú pont, akkor viszont az ehhez tartozó pont olyan tartománynak felel meg, amit d él határol. Ebbe viszont legalább egy élet be tudunk húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával, ami ellentmond a feltételnek. Tehát csak harmadfokú pontjaink lehetnek, azaz 3-reguláris a gráf.

21. **Legyen G egy egyszerű gráf, amire $\chi(G) = k$. Tekintsük G-nek egy k színnel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszédságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!**
Tfh nincs ilyen piros pont. Ekkor egy tetszőleges piros pontot mindig át tudunk színezni olyan színűre, ami hiányzik a szomszédai közül. Ha ezt az összes piros pontra megcsináljuk, akkor szintén egy jó színezést kapunk, viszont így $\chi(G) = k - 1$ lenne, ami ellentmondás.

22. **Legyen G egy 3-reguláris gráf, amire $\chi_e(G) = 3$. Tudjuk továbbá, hogy G éleinek (a színek egymás közötti permutációjától eltekintve) egyetlen jó három színnel való színezése létezik. Van-e G-ben Hamilton-kör?**
Vegyük ezt a jó színezést, és hagyjuk el belőle a zöld éleket! Mivel minden csúcs foka 3 volt, minden csúcshoz tartozott egy zöld él is. A maradék gráfunk 2-reguláris lesz, tehát körök uniója lehet csak. Tfh több ilyen körünk van! A mostani színezésben piros és kék élek váltogatják egymást. Az egyik körben cseréljük ki az élek színét! Az eredeti gráfot visszaállítva továbbra is jó színezésünk lesz, viszont ez az eredetitől eltérő lesz, ami ellentmond a feltételeknek, vagyis a zöld élek elhagyásával pont egy Hamilton-kört kapunk.

23. **Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1 + 2e/n$!**
Tudjuk, hogy $\chi(G) \leq \Delta + 1$. Egy reguláris gráfban minden fokszám megegyezik, vagyis $n\Delta = 2e$, amiből $\Delta = 2e/n$, ezt pedig behelyettesítve megkapjuk a kívánt állítást.

24. **Jelölje M_k a Mycielski-konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k. Milyen k értékekre tartalmaz M_k Euler-kört?**
$k = 2$-re biztos nem, ugyanis 2 csúcs és egy él van ebben a gráfban. M_3 megegyezik C_5-tel, így van benne Euler-kör. Innentől kezdve a k-adik lépésben az egyik csúcs fokszáma pont M_{k-1} csúcsainak számával fog megegyezni, viszont ez minden esetben páratlan, hiszen $n_\kappa = 2n_{\kappa-1} + 1$, vagyis $\kappa \geq 3$ esetén páratlan csúcsa van M_κ-nak. Így az egyetlen megoldás $k = 3$.