SzA I. gyakorlat

Ismerkedés a tárggyal és egymással

2011. szeptember 6.

1. Igaz-e a következő állítás: Minden olyan borgnak, aki ebben a szobában van, piros fülei vannak.

2. Mi az alábbi állítások tagadása? (Két állítás akkor tagadása egymásnak, ha közülük minden esetben egy és csak egy igaz)

   (a) Az osztályban minden tanuló lány.

   (b) Bergengóciában minden férfi gazdag vagy nincs felesége (vagy mindkettő).

   (c) Az osztályban van olyan lány, aki magasabb, mint 170cm.

   (d) Bergengóciában van olyan nő, aki gazdag és nincs gyereke.

3. Fogalmazzuk meg az alábbi állítás tagadását úgy, hogy ne szerepeljen benne tagadószó!
   „Minden asszony életében van olyan pillanat, hogy szeretne olyat tenni, ami nem szabad."

4. Van két állítás, p és q. Tudjuk, hogy ha p igaz, akkor q is igaz. Következik-e ebből, hogy ha q nem igaz, akkor p sem igaz?

5. Tudjuk, hogy minden hömpörő surjancs. Mondjuk meg minden alábbi állításra, hogy biztosan igaz, lehetséges, vagy biztosan hamis!

   (a) Tudjuk valamiről, hogy nem hömpörő. Azt állítom, hogy ez surjancs.

   (b) Tudjuk valamiről, hogy hömpörő. Azt állítom, hogy ez nem surjancs.

   (c) Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez hömpörő.

   (d) Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.

   (e) Tudjuk valamiről, hogy surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.

6. Egy érettségi találkozón kiderül, hogy mindenkinek vannak gyerekei. Hogyan tudnánk megcáfolni az alábbi állításokat? Mondjuk meg, hogy milyen bizonyítékot kéne mutatni annak igazolására, hogy ezek az állítások nem igazak (lehetőleg ne használjuk a legfiatalabb, legidősebb szavakat)!

   (a) Mindenkinek a legidősebb gyereke 10 évnél idősebb.

   (b) Mindenkinek a legfiatalabb gyereke 10 évnél idősebb.

   (c) Valakinek a legfiatalabb gyereke 10 évnél fiatalabb.

---

7. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$!

8. Bizonyítsuk be, hogy
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

9. Bizonyítsuk be, hogy
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
10. Bizonyítsuk be, hogy az első n páratlan szám összege éppen n^2! Másképp: $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$.
11. Bizonyítsuk be, hogy egy számtani sorozatban $a_n = a_1 + (n-1)d$ és
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2}$$
12. Bizonyítsuk be, hogy fel tudunk menni egy végtelen lépcsőn!
13. Egy autóval át akarunk kelni a sivatagon. A sivatag szélén tetszőleges mennyiségű üzemanyagot találunk, a sivatagban jelenleg nincs üzemanyag. Egy tankolással nem tudunk átkelni, de lehetőségünk van lerakatokat készíteni a sivatagban. Lehetséges-e a sivatagon az autóval átkelni?
14. Két kupac gyufánk van, és egy tetszőlegesen nagy gyufautánpótlásunk. A következőképp rakosgatjuk: az egyik kupacból elveszünk valamennyit, a másikba viszont kétszer annyit teszünk. Elérhető-e valamennyi rakosgatás után, hogy ugyanannyi szál gyufa legyen mindkét kupacban, ha eredetileg az egyikben 1, a másikban 2 szál volt?
15. Tekintsük a következő $P(n)$ állítást: egy n fantomból álló olyan csoport, amiben van egy skót fantom kizárólag skót fantomokat tartalmaz.
$P(1)$ triviálisan igaz.
Most tegyük fel, hogy $P(m)$ igaz valamilyen m-re. Legyen G egy $m+1$ fantomból álló csoport, amiben van egy skót fantom. Jelölje x ezt a skót fantomot. Ha x-hez hozzáveszünk G-ből $m-1$ másik fantomot, akkor az így kapott H csoport egy m fantomból álló csoport lesz, amiben van egy skót fantom. Mivel $P(m)$ igaz, így H-ban csak skót fantomok vannak. Legyen y az a fantom, akit kihagytunk H-ból. y és $m-1$ fantom H-ból egy olyan m tagú K fantomcsoportot alkot, amiben van legalább egy skót fantom, hiszen H-ban csak skót fantomok vannak, így az indukciós feltevést ismét használva biztosak lehetünk benne, hogy y is skót fantom, tehát G kizárólag skót fantomokból áll.
Hol a hiba? (Ez a gondolatmenet kicsit más megfogalmazásban amúgy a ló-paradoxon, lásd wikipedia.)

---

16. Hányféleképpen ültethető le egy köralakú asztal köré 6 ember? Az elforgatással egymásba vihető leültetéseket nem tekintjük különbözőknek.
17. Egy 6 házaspárból álló társaság hányféleképpen ültethető le egy padra, ha a házastársak egymás mellé ülnek? És egy köralakú asztalhoz?
18. Hányféleképpen ültethetünk le n házaspárt egy padra, ha a házastársak egymás mellé ülnek?
19. Hányféleképpen állhat fel 10 fiú és 5 lány egy sorba úgy, hogy két lány ne álljon egymás mellett?
20. Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \ldots n$ számoknak, amelyekben a páros és páratlan számok felváltva követik egymást?