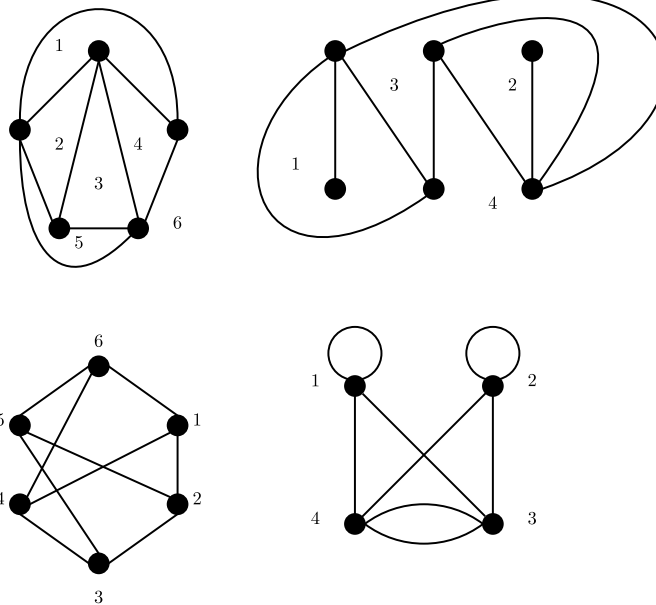


SzA IX. gyakorlat

Dualitás és egyebek

2010. november 3/4.

1. Készítsük el az alábbi gráfok duálisát!

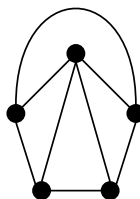


Az ábrán látható.

2. Legyen G egy 20 pontú, összefüggő, 3-reguláris síkgráf. Hány pontja van G duálisának, G^* -nak?

A duális pontjainak száma pont G területeinek számával lesz egyenlő, emi az Euler-formula alapján 12.

3. Mutassunk egy olyan egyszerű G gráfot, melynek 5 pontja van, és izomorf a duálisával!

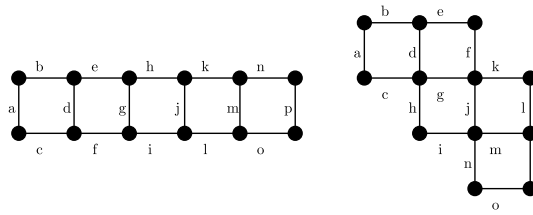


4. Egy nemzetközi konferencián 5 ország egy-egy képviselője ül asztalhoz. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos!

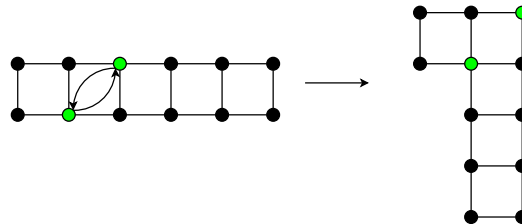
Feltesszük, hogy az országok összefüggőek, valamint a világ nem tórusz alakú. Feleltessünk meg egy gráfban minden országnak egy csúcsot, és akkor legyen összekötve két csúcs, ha a két ország szomszédos egymással. Ennek a gráfnak síkbarajzolhatónak kell lennie. Ha viszont mindenki szomszédos lenne mindenkivel, akkor a gráf nem lenne síkbarajzolható, mert K_5 lenne.

5. Rajzoltam egy n csúcsú fát, de elveszítettem. Rajzoljuk le a duálisát! Egy pont, $n - 1$ hurokéllal. Ez azért van így, mert a fában nincs kör, tehát egy tartománya van, továbbá az $n - 1$ él mindegyike ezen egy tartomány között fut.

6. Gyengén izomorf-e ez a két gráf?



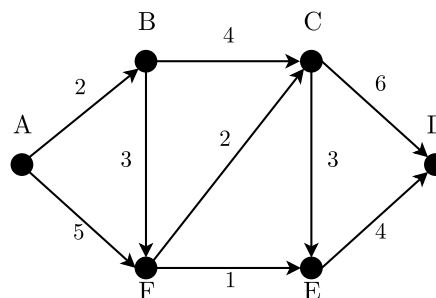
Igen, egy megfeleltetés az élek között az ábrán látható. Whitney-tételek alapján is meg lehet csinálni, a következőhöz hasonló lépéseket felhasználva:



7. Milyen a teljes gráf mélységi bejárása?

Egy n hosszú út.

8. Határozzuk meg a PERT-módszer segítségével az alábbi tevékenységekhez szükséges összigidőt, és a kritikus tevékenységeket!



Topologikus sorrend (emeletek): $ABFCED$. Idők: $A : 0, B : 2, F : 5, C : 7, E : 10, D : 14$, és mindegyik kritikus. (Ez csak a végeredmény, bővebben könyv, előadás, gyakorlat.)

9. Gondoltam egy egész számot 0 és 31 között. Nyilván ki lehet barkochbázni 5 kérdéssel. Adjunk meg előre 5 kérdést úgy, hogy az azokra adott válaszokból kitalálható legyen a gondolt szám!

Rákérdezünk, hogy bináris alakban az egyes számjegyek 1 értékűek-e? Mind az 5 helyiértéket végigkérdezve pont megkapjuk.

10. Hány összehasonlítással lehet megtalálni n elem közül a legkisebbet? (Ha kitaláltuk, hogy valamilyen k , akkor be kell bizonyítani, hogy k mindig elég, és van olyan eset, mikor k szükséges is.) $n - 1$ mindig elég, hiszen ha mindig megtartjuk a legkisebb eddig találtat, és azzal hasonlítjuk a többi, akkor nem maradhat ki egy sem, a tranzitivitás miatt pedig a végére a legkisebb lesz a kezünkben. Ennyi szükséges is, hiszen tfh valaki ad nekünk egy

ennél kevesebbel is boldoguló algoritmust. Először adjunk neki n számot, és készítsünk egy összehasonlítótsági gráfot a működése közben. Nyilván ez a gráf nem lehet összefüggő (kevesebb, mint $n - 1$ éle van), tehát legalább két komponense van. Legyünk gonoszak, és az egyik olyan komponensben, ahol az algoritmus szerint nincs a legkisebb, csökkentsük az összes szám értékét egy nagy számmal (hogy biztos itt legyen a legkisebb). Az így megváltoztatott számokat beadván az algoritmusnak pontosan az előző lépéseket fogja végrehajtani (a reláció semelyik két hasonlítottánál nem változott), így az eredetileg legkisebbnek mondott számot fogja megadni, pedig annál van kisebb is. Tehát nem létezhet ilyen algoritmus.

11. **Rendezzük a következő listát beszűrős, buborék- és összefésüléses rendezés segítségével:** $[4, 11, 9, 10, 5, 6, 8, 1, 2, 16]$.

Könyv, órai jegyzet, gyakorlat.

12. **A $[6, 4, 8, 3, 7, 2, 5, 1]$ tömb rendezése során (a rendező algoritmus néhány lépése után) a következő közbülső állapot jött létre:** $[4, 6, 3, 8, 7, 2, 5, 1]$. **Az alább felsorolt módszerek közül mely(ek) alkalmazásakor fordulhatott elő?**

- (a) **beszűrős rendezés** nem, mert teljes méretű listánk csak a rendezés legvégén van, viszont akkor már rendezett.
- (b) **buborékrendezés** igen, először 4-6 csere, aztán 6-8 nem csere, majd 8-3 csere, és pont ez jön ki.
- (c) **összefésüléses rendezés** implementációtól függ. Ha külön ábrázoljuk a közbülső listákat, akkor teljes hosszúság csak a legvégén, rendezett állapotban lehet, tehát nem. Ha egyben, akkor a $[6, 4]$, $[8, 3]$, $[7, 2]$, $[5, 1]$ kis listákból az első kettőt már rendezte, a többi még nem.

13. **Adjunk meg egy olyan G_1 és G_2 gráfokat, hogy adott lerajzolás szerint $G_1 \cong (G_1^*)^*$ és $G_2 \not\cong (G_2^*)^*$!**

Az előző feladatokban volt mindkét esetre példa.

14. **G egy összefüggő, irányított gráf, melynek van olyan mélységi bejárása, amelynek során keletkezett feszítőerdő csupa izolált pontból áll. Az ilyen n pontú gráfok közül hogy néz ki a minimális, illetve a maximális élszámú?**

Összefüggőség miatt fánál kevesebb él nem jöhet szóba, az $n - 1$ hosszú út (a bejárás során „visszafele” haladva) pont jó. A maximális élszámúhoz meg kell gondolni, hogy DAG-nak kell lennie (irányított kör elrontaná az izoláltságot minden bejárásnál, ugyanis lenne visszaél, lásd tétel), tehát írjuk fel a topológikus sorrendben a pontokat, és ha minden lehetséges előrele mutató élet behúzzunk (azaz az i csúcsból vezet irányított él minden $i + 1 \dots n$ csúcsba), akkor még pont jók vagyunk, többet a minden lehetségesnél meg nem tudunk behúzni. **Megjegyzés:** a maximális élszám számolásakor feltettem, hogy egyszerű a gráf. Ha lehetnének párhuzamos élek, akkor tetszőlegesen sokat be lehetne húzni, tehát a feladat szövegezése szerint a megoldás ∞ (bár a szándékom nem ez volt).

15. **[ZH 2008. november 17] Határozzuk meg mindazon egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható G gráfokat, amiknek létezik olyan G^* duálisuk, hogy $G \cong G^*$ teljesül, továbbá $e = n + 2$ áll, ahol e a G éleinek, n pedig**

G csúcsainak számát jelöli.

Az izomorfia miatt $n^* = n$, a duális definíciója miatt pedig $n^* = t$, tehát az Euler-formula, az előzőek, és a feltétel alapján $n + t = e + 2 = n + n = n + 2 + 2$, ahonnan $n = 4$ és $e = 6$. Mivel egyszerű gráfról van szó, ezért nem lehetnek többszörös- és hurokélek, a K_4 -nek pedig pont 6 éle van, így ha létezik ilyen gráf, akkor az csak a K_4 lehet. K_4 -et síkbarajzolva és elkészítve a duálisát láthatjuk, hogy jó, tényleg izomorfak.

16. [PZH 2008. december 5] **Tegyük fel, hogy G olyan síkbarajzolható, egyszerű gráf, amibe nem tudunk további élt húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával. Igazoljuk, hogy ha G^* a G duálisa, akkor G^* 3-reguláris.**

Ha a duálisban van másod- vagy elsőfokú pont, akkor az eredeti gráf nem egyszerű (másodfokú: párhuzamos élek, elsőfokú: hurokél). Ha van 3-nál magasabb d fokú pont, akkor viszont az ehhez tartozó pont olyan tartománynak felel meg, amit d él határol. Ebbe viszont legalább egy élet be tudunk húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával, ami ellentmond a feltételnek. Tehát csak harmadfokú pontjaink lehetnek, azaz 3-reguláris a gráf.

17. [ZH 2009. november 23.] **Egy 12 csúcsú konvex poliédernek 10 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?**

A konvex poliéder élhálója pont egy síkbarajzolható gráfnak felel meg. Ennek a gráfnak a duálisában a pontok fokszáma viszont pont a nekik megfelelő lapok oldalszámával egyezik meg. Azaz: $n = 12$, $t = n^* = 10$, $e^* = e = n + t - 2 = 20$, $\sum d^* = 2e^*$, $\sum d^* = n^*d^*$, fentieket rendezve, kiszámolva a $d^* = 4$, vagyis a keresett szám 4.