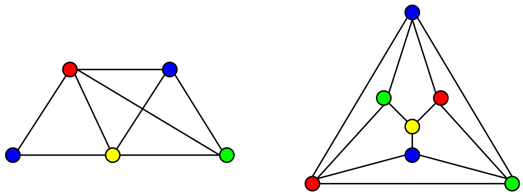
SzA VIII. gyakorlat

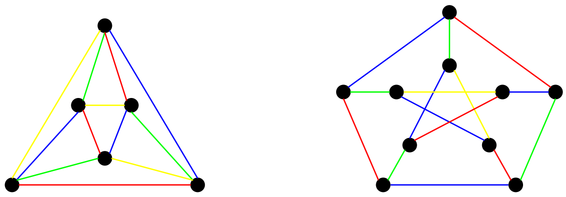
Színes gráfok, és síkba is rajzolunk

2010. október 27/28.

1. **Mennyi a következő gráfok kromatikus száma:**
   C_4, C_5, $K_{2,4}$, alábbi bal 2 gráf

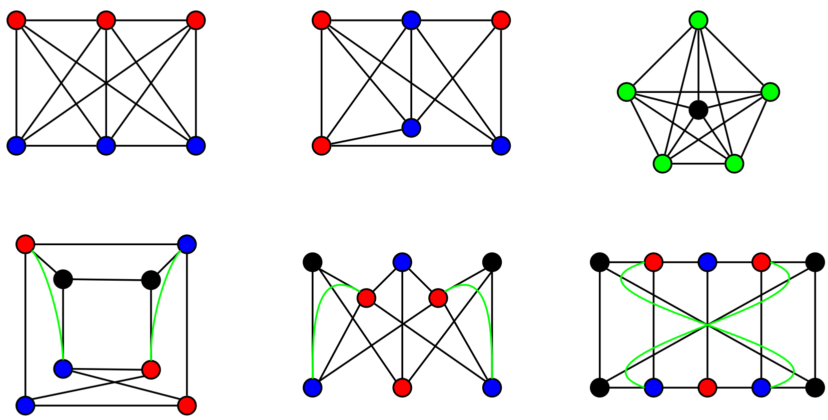


$\chi(C_4) = 2$, páros hosszú kör kromatikus száma mindig 2. $\chi(C_5) = 3$, mert páratlan kör. $\chi(K_{2,4}) = 2$, mert minden páros gráf kromatikus száma 2. A bal oldali gráfban $\omega(G) = 4$, tehát $\chi(G) \geq 4$, viszont egy 4 színnel színezést tudunk is mutatni. A jobb oldali gráfban $\chi(G) = 4$, mert bár az alsó korlát 3, a külső csúcsoknak különböző színűeknek kell lenniük, és ha ezeket kiszínezzük, a középső csúcsnak muszáj bevezetni egy negyedik színt.



2. **Mennyi a fenti jobb oldali két gráf élkromatikus száma?**
   A bal oldaliban $\Delta(G) = 4$, és egy 4 színnel való jó színezés szerepel is az ábrán. A jobb oldali gráfot ha megpróbáljuk 3 színnel kiszínezni, akkor a külső kör csak egyféle lehet (a forgatásokat és színpermutációkat leszámítva), ebből a külső kört a belsővel összekötő élek színei adódnak, és ahol a sárgát be kellett vezetni, ott nem lehetett már semelyik eredeti színt használni. Így ez csak 4 színnel élszínezhető.

3. **Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?**



Egyik sem, egy kivételével mindegyikben egy $K_{3,3}$ bújik meg. Pirossal vannak jelölve a házak, kékkel a kutak, zölddel pedig az összevonásokkal képződő élek.

4. **G csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos G-ben, ha egymásból bástyával egy lépésben elérhetők. Mennyi G kromatikus száma?**
Az egy sorhoz (vagy oszlophoz) tartozó csúcsok K_8-at alkotnak, tehát biztos, hogy $\chi(G) \geq 8$. 8 szín viszont elég is, az alábbi egy jó színezés:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & \vdots & & & \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{array}$$

5. **Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1 + 2e/n$!**
Tudjuk, hogy $\chi(G) \leq \Delta + 1$. Egy reguláris gráfban minden fokszám megegyezik, vagyis $n\Delta = 2e$, amiből $\Delta = 2e/n$, ezt pedig behelyettesítve megkapjuk a kívánt állítást.

6. **Mycielski-konstrukciót használva rajzoljunk olyan M_k gráfokat, ahol $\omega(M_k) = 2$, $\chi(M_k) = k$, $k = \{2, 3, 4\}$! De tényleg, a szabályt használva, gyakorlás miatt!**
Léccci! (Könyvben, jegyzetben benne van.)

7. **Jelölje M_k a Mycielski-konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k. Milyen k értékekre tartalmaz M_k Euler-kört?**
$k = 2$-re biztos nem, ugyanis 2 csúcs és egy él van ebben a gráfban. M_3 megegyezik C_5-tel, így van benne Euler-kör. A k-adik lépésben az egyik csúcs fokszáma pont M_{k-1} csúcsainak számával fog megegyezni, viszont ez minden esetben páratlan, hiszen $n_k = 2n_{k-1} + 1$, vagyis $k \geq 3$ esetén páratlan csúcsa van M_k-nak. Így az egyetlen megoldás $k = 3$.

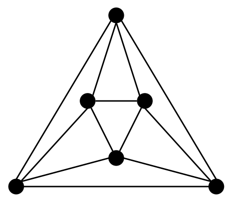
8. **Hány csúcsa van egy összefüggő, 4-reguláris síkgráfnak, ha síkbarajzolásakor 10 tartomány keletkezik?**
Az Euler-formula alapján $(n + t = e + 2)$ $n = 8$.

9. **Mutassuk meg, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6!**
Síkbarajzolható egyszerű gráfok esetén $e \leq 3n - 6$, és ebben az esetben $n\delta(G) \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2e$, de tudjuk, hogy $\delta(G) = 6$, tehát $e \geq 3n$, ami ellentmondás.

10. **[PZH 2008. december 5.] Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges 3-kromatikus, 100 csúcsú G gráfnak van 67 olyan csúcsa, amik páros gráfot feszítenek.**
Legyen a zöld szín az, amelyikből a legkevesebb van. Ha elhagyjuk a zöld pontokat, akkor a maradék gráf két színnel színezhető, tehát páros. A skatulya elvet felhasználva zöldből legfeljebb 33 lehet, tehát a maradék páros gráfnak legalább $100 - 33 = 67$ csúcsa van.

11. **[ZH 2009. november 23.] A G gráfot úgy kaptuk, hogy a 6 pontú teljes gráfból elhagytunk három független (vagyis pontdiszjunkt) élt. Síkbarajzolható-e ez a G gráf? *(Ha igen, rajzoljuk le keresztezés nélkül, csupa egyenes szakasszal, ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be!)***

Magyarul: egy K_6-ból elhagytunk egy teljes párosítást. Mindenféle szimmetria-okokból ezt csak egyféleképpen tehetjük meg. A keletkezett gráfban $e = 15 - 3 = 12$. Síkbarajzolható (ezt megtippeltük), akinek segít, t-t is kiszámolhatja az Euler-formulával. Egy megoldás pl:



---

12. **Legyen G egy 3-reguláris gráf, amire $\chi_e(G) = 3$. Tudjuk továbbá, hogy G éleinek (a színek egymás közötti permutációjától eltekintve) egyetlen jó három színnel való színezése létezik. Van-e G-ben Hamilton-kör?**
Vegyük ezt a jó színezést, és hagyjuk el belőle a zöld éleket! Mivel minden csúcs foka 3 volt, minden csúcshoz tartozott egy zöld él is. A maradék gráfunk 2-reguláris lesz, tehát körök uniója lehet csak. Tfh több ilyen körünk van! A mostani színezésben piros és kék élek váltogatják egymást. Az egyik körben cseréljük ki az élek színét! Az eredeti gráfot visszaállítva továbbra is jó színezésünk lesz, viszont ez az eredetitől eltérő lesz, ami ellentmond a feltételeknek, vagyis a zöld élek elhagyásával pont egy Hamilton-kört kapunk.

13. **Legyen G egy egyszerű gráf, amire $\chi(G) = k$. Tekintsük G-nek egy k színnel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszédságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!**
Tfh nincs ilyen piros pont. Ekkor egy tetszőleges piros pontot mindig át tudunk színezni olyan színűre, ami hiányzik a szomszédai közül. Ha ezt az összes piros pontra megcsináljuk, akkor szintén egy jó színezést kapunk, viszont így $\chi(G) = k - 1$ lenne, ami ellentmondás.

14. **Bizonyítsuk be, hogy minden n pontú gráfra $\chi(G) \leq 1 + n - \alpha(G)$!**
Független pontok mindig színezhetők egy színnel (persze nem biztos, hogy így a színezés optimális lesz, de ez most minket nem zavar), tehát egy maximális független ponthalmaznak adjuk a piros színt! A maradék $n - \alpha(G)$ pont közül mindegyiket színezzük különbözőre, így $1+n-\alpha(G)$ (piros + összes többi) színnel helyesen kiszíneztük a gráfot.

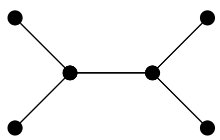
15. **Legyen G olyan (irányítatlan) gráf, melynek kromatikus száma k. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon!**
A színeknek definiáljuk egy sorrendjét! Ez lehet pl. a színek indexe. Vegyük a gráf k-színnel való színezését, majd irányítsuk úgy az éleket, hogy mindig a kisebb sorszámúból a nagyobb sorszámúval színezett csúcsba mutasson! Egyenlőség a jó színezés miatt nem állhat elő. Ebben az esetben minden, a gráfban lévő irányított útban a csúcsok színei folyamatosan növekednek, így mivel legfeljebb k színt használhatunk, egy irányított út is legfeljebb k hosszú lehet.

16. **Legyen G 100-reguláris gráf 2001 ponton. Határozzuk meg $\chi_e(G)$ értékét!**

Tfh $\chi_e(G) = \Delta(G) = 100$. Ekkor mivel reguláris a gráf, minden csúcsnál meg kell jelennie mind a 100 színnek. Ekkor pl. a piros élek viszont pont egy teljes párosítást alkotnának, ami a csúcsok páratlan száma miatt lehetetlen, tehát $\chi_e(G) = \Delta(G) + 1 = 101$ (Vizing-tétel!).

17. **Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges egyszerű G gráfra $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$!**
Az egy színnel színezett pontok egy jó színezésben biztos, hogy függetlenek, ezért egy szín legfeljebb $\alpha(G)$ csúcsnak lehet a színe. Mivel minden pont ki van színezve, és $\chi(G)$ színünk van, ezért $\chi(G)\alpha(G) \geq |V(G)|$, ez pedig maga az állítás.

18. **Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan $\chi(G)$ színnel való színezése, melyben az egyik színosztály pontosan $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?**
Nem, egy ellenpélda lehet a következő, ahol a 4 elsőfokú csúcsot azonos színűre színezve a gráfot nem lehet két színnel színezni, pedig a kromatikus száma 2.



19. **Adjuk példát minden $k \geq 2$ pozitív egész esetén olyan G_k gráfra, melynek kromatikus száma 2, de megadható a csúcsainak olyan sorrendje, hogy azokat e sorrendben színezve k színt fogunk használni! (G_k-nak tetszőleges számú csúcsa és éle lehet, mi választhatjuk meg.)**
Legyen ez a gráf $K_{k,k}$ annyi módosítással, hogy az egymással szemben levő csúcsok között töröljünk az élet! Ekkor ha kiszínezzük az első csúcsot pirosra, utána a mohó algoritmusnak odaadjuk a vele szemben lévő csúcsot, akkor azt is pirosra fogja színezni. Ez a csúcs viszont össze van kötve az összes többi másik osztálybelivel, így a piros színt többet nem használhatjuk. A többi csúcsra ugyanezt elvégezve pont k színt fog használni a mohó algoritmus (esetleg indukcióval pontosabban is be lehet látni), de ez a gráf továbbra is páros, tehát kromatikus száma 2.

20. **Legyen G olyan gráf, melynek kromatikus száma k. Legyen $A \subseteq V(G)$ a csúcsok egy olyan részhalmaza, melyben tetszőleges két pont távolsága legalább négy (két pont távolsága a közöttük vezető utak közül a minimális élszámú). Mutassuk meg, hogy az A-beli csúcsok tetszőleges $k+1$ színnel való színezése kiterjeszthető az egész G gráf $k+1$ színnel való színezésévé! (Kiterjesztésen azt értjük, hogy a keresett színezésnél az A-beli csúcsok a megadott $(k+1)$-színezésük szerinti színt kapják.)**
Nem írom le a teljes megoldást. A lényeg az, hogy színezzük ki k színnel a gráfot! A kimaradó szín legyen piros. Az előre megadott ($k+1$ színt használó) A színezését nézzük végig! Ahol az igényelt és az ott szereplő szín megegyezik, ott nem csinálunk semmit, ahol nem egyezik meg, azt átszínezzük az igényeltre. Ha van olyan szomszédja, ami így ütközik vele, azt átszínezzük pirosra. Ezután már csak azt kell megmutatni, hogy az így létrejövő színezés jó lesz. A lényeg az, hogy mivel a megadott csúcsok között nagy a távolság, az ő pirosra színezésük egymással nem fog ütközni.