SzA VIII. gyakorlat

Színes gráfok, és síkba is rajzolunk

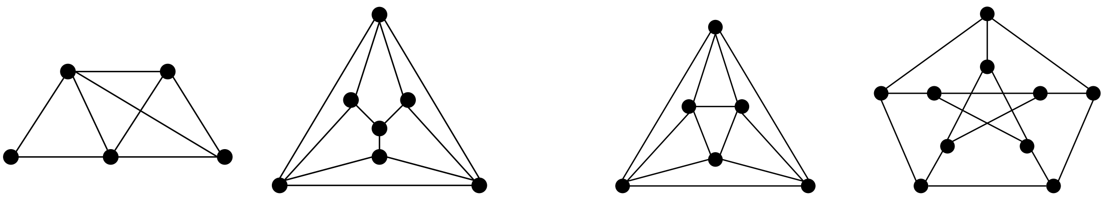
2010. október 27/28.

Hasznos tudnivalók

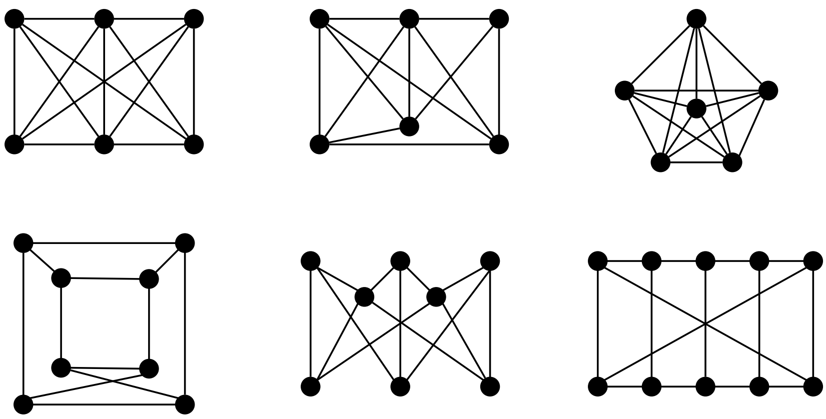
- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$
- Brooks: $\chi(G) \leq \Delta(G)$, ha G nem teljes gráf és nem páratlan kör
- $\Delta(G) \leq \chi_e(G)$
- Vizing: egyszerű gráfokra $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$
- Shannon: $\chi_e(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$
- síkbarajzolható gráfokra: $n + t = e + k + 1$, öf esetben $n + t = e + 2$ (Euler)
- egyszerű, legalább 3 pontú, síkbarajzolható gráfokra: $e \leq 3n - 6$

Feladatok

1. Mennyi a következő gráfok kromatikus száma:
   C_4, C_5, $K_{2,4}$, alábbi bal 2 gráf



2. Mennyi a fenti jobb oldali két gráf élkromatikus száma?
3. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



4. G csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos G-ben, ha egymásból bástyával egy lépésben elérhetők. Mennyi G kromatikus száma?
5. Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1 + 2e/n$!

6. Mycielski-konstrukciót használva rajzoljunk olyan M_k gráfokat, ahol $\omega(M_k) = 2$, $\chi(M_k) = k, \;\; k = \{2, 3, 4\}$! De tényleg, a szabályt használva, gyakorlás miatt!

7. Jelölje M_k a Mycielski-konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k. Milyen k értékekre tartalmaz M_k Euler-kört?

8. Hány csúcsa van egy összefüggő, 4-reguláris síkgráfnak, ha síkbarajzolásakor 10 tartomány keletkezik?

9. Mutassuk meg, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6!

10. **[PZH 2008. december 5.]** Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges 3-kromatikus, 100 csúcsú G gráfnak van 67 olyan csúcsa, amik páros gráfot feszítenek.

11. **[ZH 2009. november 23.]** A G gráfot úgy kaptuk, hogy a 6 pontú teljes gráfból elhagytunk három független (vagyis pontdiszjunkt) élt. Síkbarajzolható-e ez a G gráf? *(Ha igen, rajzoljuk le keresztezés nélkül, csupa egyenes szakasszal, ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be!)*

---

12. Legyen G egy 3-reguláris gráf, amire $\chi_e(G) = 3$. Tudjuk továbbá, hogy G éleinek (a színek egymás közötti permutációjától eltekintve) egyetlen jó három színnel való színezése létezik. Van-e G-ben Hamilton-kör?

13. Legyen G egy egyszerű gráf, amire $\chi(G) = k$. Tekintsük G-nek egy k színnel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszédságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!

14. Bizonyítsuk be, hogy minden n pontú gráfra $\chi(G) \leq 1 + n - \alpha(G)$!

15. Legyen G olyan (irányítatlan) gráf, melynek kromatikus száma k. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon!

16. Legyen G 100-reguláris gráf 2001 ponton. Határozzuk meg $\chi_e(G)$ értékét!

17. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges egyszerű G gráfra $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$!

18. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan $\chi(G)$ színnel való színezése, melyben az egyik színosztály pontosan $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?

19. Adjuk példát minden $k \geq 2$ pozitív egész esetén olyan G_k gráfra, melynek kromatikus száma 2, de megadható a csúcsainak olyan sorrendje, hogy azokat e sorrendben színezve k színt fogunk használni! (G_k-nak tetszőleges számú csúcsa és éle lehet, mi választhatjuk meg.)

20. Legyen G olyan gráf, melynek kromatikus száma k. Legyen $A \subseteq V(G)$ a csúcsok egy olyan részhalmaza, melyben tetszőleges két pont távolsága legalább négy (két pont távolsága a közöttük vezető utak közül a minimális élszámú). Mutassuk meg, hogy az A-beli csúcsok tetszőleges $k + 1$ színnel való színezése kiterjeszthető az egész G gráf $k + 1$ színnel való színezésévé! (Kiterjesztésen azt értjük, hogy a keresett színezésnél az A-beli csúcsok a megadott $(k + 1)$-színezésük szerinti színt kapják.)