

SzA VII. gyakorlat

Párosítunk, valamint görög betűk

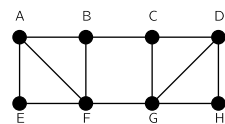
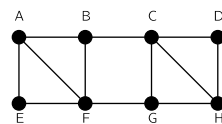
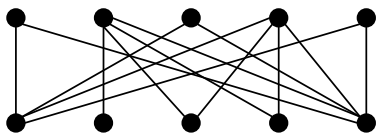
2010. október 20/21.

Hasznos tudnivalók

- Hall:
 $G(A, B, E)$ páros gráfban van A -t lefedő párosítás $\Leftrightarrow |X| \leq |N(X)| \quad \forall X \subseteq A$
- $\alpha(G)$: független csúcsok maximális száma G -ben
- $\nu(G)$: független élek maximális száma G -ben (maximális párosítás)
- $\rho(G)$: lefógó élek minimális száma G -ben (csak akkor értelmezett, ha nincs izolált pont)
- $\tau(G)$: lefógó csúcsok minimális száma G -ben
- $\alpha(G) \leq \rho(G), \nu(G) \leq \tau(G)$
- Gallai: $\alpha(G) + \tau(G) = n, \nu(G) + \rho(G) = n$
- König: páros gráfokra! $\nu(G) = \tau(G); \alpha(G) = \rho(G)$, ha nincs izolált pont
- Tutte: $G(V, E)$ gráfban \exists teljes párosítás $\Leftrightarrow G$ -ből elhagyva tetszőleges $S \subseteq V$ pontokat a keletkező gráf páratlan csúcsú komponenseinek száma nem nagyobb $|S|$ -nél.

Feladatok

1. Adjunk meg egy maximális párosítást a bal oldali gráfban!



2. Adjunk meg maximális független élhalmazt és minimális lefógó pontthalmazt a jobb oldali gráfokban!
3. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!
4. Igazoljuk, hogy az n pontú G páros gráfban $\alpha(G) \geq n/2$!
5. Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a $G = K_{n,m}$ teljes páros gráfra!
6. A $V = \{2, 3, \dots, 2007\}$ pontthalmazon definiáljuk a $G(V, E)$ gráfot úgy, hogy $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \nmid y \wedge y \nmid x!$ ($a \nmid b$: a nem osztója b -nek.) Van-e G -ben teljes párosítás?

7. Tegyük fel, hogy a G gráf minden összefüggő komponense egy kör. Mi az a legkisebb m szám, amire teljesül, hogy G -hez hozzá lehet venni m (megfelelően választott) élet úgy, hogy az új gráfban legyen teljes párosítás? Mikor létezik ilyen m szám?
8. A 2000 csúcsú G gráfban $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G -ben nincs teljes párosítás!
9. Mutassuk meg, hogy ha az n pontú G gráfban nincs hurokél és $\tau(G) = n - 1$, akkor $G = K_n$!
10. A G gráfnak $2n$ pontja van és tudjuk, hogy minden pont foka legalább n . Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\rho(G)$ értékét!
11. Legyen egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n . Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \geq n$!
12. **[ZH 2009. november 17.]** Legyenek a G páros gráf színosztályai A és B , és tegyük fel, hogy legfeljebb $|B|$ él szükséges G összes pontjának lefogásához. Igazoljuk, hogy ekkor az A színosztályra teljesül a Hall feltétel.
13. **[ZH 2009. október 19.]** Legyen G az a gráf, mely hét darab egyenként 287 pontú teljes gráf pontdiszjunk egyesítése. Határozzuk meg az $\alpha(G)$, $\tau(G)$, $\rho(G)$, $\nu(G)$ értékeket!

14. A $G = (A, B, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és az A osztály minden valódi X részhalmazára (azaz $\emptyset \subset X \subset A$) teljesül, hogy $|N(X)| > |X|$. Igazoljuk, hogy G tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítással!
15. Legyen $G = (A, B, E)$ egy egyszerű páros gráf, melyben minden A -beli pont fokszáma azonos (d_A), és minden B -beli pont fokszáma is azonos (d_B). Tegyük fel, hogy $d_A, d_B > 0$. Mutassuk meg, hogy G -ben akkor és csak akkor létezik A -t lefedő párosítás, ha $|A| \leq |B|$!
16. Egy szigeten n család lakik. A Sziget Vadászati Előljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet n egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet, n mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdasági és egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?
17. Egy G összefüggő gráf olyan, hogy tetszőleges pontját elhagyva a maradék gráfban létezik teljes párosítás. Bizonyítsuk be, hogy G -ben nincs elvágó él! (Egy él elvágó, hogyha az élet elhagyva megszűnik a gráf összefüggősége.)
18. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|!$ $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszáma.
19. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög- és hurokmentes G gráfban $\alpha(G)\tau(G) \geq |E|!$

20. **Házi feladat:** színezések, síkbarajzolhatóság átnézése