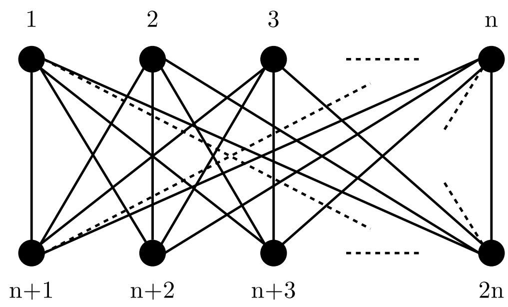
SzA V. gyakorlat

A gráfok összefüggnek, meg lehetnek párosak is

2010. október 6/14.

1. **Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre a következő, $2n$ csúcsú gráf ($K_{n,n}$, teljes páros gráf) k-szorosan összefüggő!**



Ha elhagyunk egy teljes pontosztályt (n pontot), akkor a gráf nem lesz összefüggő, tehát $k \leq n$. Ha viszont úgy hagyunk el valahány csúcsot, hogy az alsó és felső pontosztályban is marad, akkor a gráf összefüggő marad. Tehát legfeljebb $n-1$ csúcsot elhagyva mindkét pontosztályban mindenképp marad pont, így a gráf összefüggő marad, tehát $k \geq n$. A fentiekből $k = n$.

2. **Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf k-szorosan pontösszefüggő, akkor k-szorosan élösszefüggő is!**
Ha k-szorosan pontösszefüggő, akkor tetszőleges i, j pontok között létezik legalább k pontidegen út. Két pontidegen út élidegen is, tehát tetszőleges i, j pontok között létezik legalább k élidegen út, ami azt jelenti, hogy a gráf k-szorosan élösszefüggő.

3. **Legyen G az a gráf, mely egy 8 hosszú körből úgy keletkezik, hogy a körön átellenes csúcsokat egy-egy éllel összekötjük. Igazoljuk, hogy G háromszorosan pontösszefüggő, de négyszeresen már nem!**
Ha egy pont mind a 3 szomszédját elhagyjuk, akkor akkor szétesik két részre, így nem 4-szeresen pontösszefüggő. A szimmetriák miatt kevés eset vizsgálatával meg tudunk róla bizonyosodni, hogy bármely két pont elhagyásával összefüggő marad, így 3-szorosan pontösszefüggő (vagy azt is megnézhetjük ugyanígy, hogy tetszőleges két pont között megy legalább 3 pontdiszjunkt út).

4. **A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen?**
Magyarul a feladat lényege: mennyi az a legkisebb élszámú 10 csúcsú gráf, ami 4-szeresen élösszefüggő? Mivel minden fokszám legalább 4 (különben 3 él elhagyásával a gráf már nem biztos, hogy összefüggő lenne), $e \geq 20$ (mert $10 \cdot 4 \leq 2e$). Ennyi elég is, mert a következő gráf 20 élet tartalmaz: 10 ponton keresztül két H-kör. Minden fokszám 4, és a két H-kör miatt tetszőleges két pont között van legalább éldiszjunkt 4 út, így 4-éöf. A teljes gráfból elhagyható élek száma tehát: $\binom{10}{2} - 20 = 25$.

5. **[ZH 2008. október 10.] Tegyük fel, hogy a G gráf k-szorosan élösszefüggő, F a G egy feszítőfája és e az F egy éle. Bizonyítsuk be, hogy a G gráfnak legalább $k-1$ olyan, e-től különböző f éle van, amire igaz, hogy F-ből e-t törölve és f-et behúzva G egy feszítőfáját kapjuk.**
k-éöf-ből következik, hogy tetszőleges két csúcs között legalább k élidegen út megy. Vegyük e két végpontját (i és j), közöttük e-n kívül még legalább $k-1$ éldiszjunkt út megy. Egy ilyen e-től éldiszjunkt utat megnézve biztos van benne olyan f él, ami nincs benne F-ben, hiszen ha nem lenne, akkor kör lenne F-ben. Tehát e és f kicserélhető, ez viszont igaz mind a $k-1$ e-től éldiszjunkt útra.

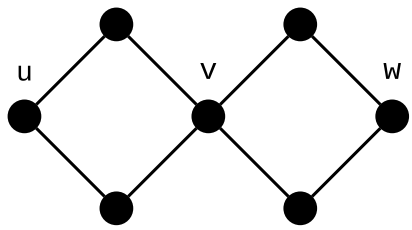
6. **G páros gráf. Igaz-e, hogy ha G-ben van Hamilton-kör, akkor van benne teljes párosítás? Igaz-e az állítás megfordítása?**
Igaz, mert egy páros gráfban minden kör páros hosszú, így egy Hamilton kör is, aminek minden második éle pont egy teljes párosítást ad. Megfordítva nem igaz, pl. egy $2k$ csúcsú páros gráfban, ahol minden pont foka 1, van teljes párosítás, de Hamilton-kör biztos nincs.

7. **Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban (tehát amiben minden fokszám 2) a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.**
Egy 2-reguláris gráf mindenképp körök uniója. Mivel páros, ezért esetünkben páros hosszú körök uniójáról beszélünk, mondjuk k darabról. Egy ilyenben kétféle teljes párosítást csinálhatunk (sorban minden második élet bevesszük, a többit kihagyjuk, vagy felcseréljük a szerepeket). Az egyes komponensekben a választás viszont független egymástól, így a teljes párosítások száma 2^k.

---

8. **Igaz-e, hogy ha a G gráfban van k db éldiszjunkt út u-ból v-be, és v-ből w-be is, akkor van k db éldiszjunkt út u-ból w-be is?**
Igaz, mert: tfh nincs, azaz legfeljebb $k-1$ él éldiszjunkt út megy u-ból w-be. Ekkor ezeket az utakat $k-1$ él biztos lefogja (Menger), ezen élek elhagyásával a gráf szétesik, és u és w külön komponensbe kerül. v vagy az egyik, vagy a másik komponensben lesz (legyen mondjuk w komponensében, a másik eset ugyanez pepitában), azaz $k-1$ él elhagyásával az u és v közötti utakat lefogtuk. Ebből következik, hogy u és v között legfeljebb $k-1$ éldiszjunkt út mehet (Menger ismét), de ez ellentmond a feltevésnek.

9. **Igaz-e, hogy ha a G gráfban van k db pontdiszjunkt út u-ból v-be, és v-ből w-be is, akkor van k db pontdiszjunkt út u-ból w-be is?**
Nem, ellenpélda ($k=2$):



10. **Bizonyítsuk be, hogy egy $G=(V,E)$ gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha a csúcsoknak minden valódi $\emptyset \neq X \subset V$ részhalmazából legalább k él lép ki a $V-X$ halmazba!**
Egyik irány: k-szorosan élösszefüggő $\Rightarrow \emptyset \neq X \subset V$: legalább k él lép ki a $V-X$

halmazba. Tfh kevesebb, mint k, ekkor ha ezeket az éleket elhagyjuk, X egy külön komponenst fog alkotni, vagyis nem lehetett volna k-szorosan élösszefüggő. Másik irány: $\emptyset \neq X \subset V$: legalább k él lép ki a $V - X$ halmazba $\Rightarrow$ k-szorosan élösszefüggő. Tfh a gráf nem k-szorosan élösszefüggő. Ekkor van olyan $k-1$ él, amiket elhagyva a gráf több komponensre esik. Az egyik komponens csúcsai legyenek X, a többié pedig $V - X$. Ekkor e két halmaz között legfeljebb $k-1$ él futhatott, ami ellentmond a feltételnek.

11. **Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r-elemű halmazok. A $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza legyen $V = A \cup B \cup C$, és legyen $uv \in E$, ha u és v nem ugyanabból az r-elemű halmazból valók. Mekkora az a legnagyobb k érték, melyre G k-összefüggő?**
Ha két halmaz összes elemét elhagyjuk ($2r$ pontot), akkor csak egy csomó diszjunkt pontunk marad, így a gráf legfeljebb $2r$-összefüggő. $2r-1$ pontot viszont bárhogy is hagyunk el, a gráf összefüggő marad (ugyanolyan gondolatmenettel, mint az 1-es feladatban). Így a $k = 2r$.

12. **Bizonyítsuk be, hogy ha egy 2010-pontú G gráf 7-szeresen pontösszefüggő, akkor bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 287-élű út.**
Az ismert tétel alapján a feltételből következik, hogy tetszőleges u és v csúcs között legalább 7 pontdiszjunkt út vezet. Ezek az utak legfeljebb a maradék 2008 csúcson osztoznak, így legfeljebb 2008 pontot kell elosztani legalább 7 út között. $2008/7 < 287$, így a skatulya-elv miatt van olyan út, ami legfeljebb ennyi csúcsot, vagyis legfeljebb 287 élet tartalmaz.

13. **A G irányított gráf minden csúcsából k él indul és k él érkezik. Igaz-e, hogy G-nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, amik G minden csúcsán áthaladnak?**
Csinálunk egy páros gráfot, ahol egy u csúcsból egy u_{be} és egy u_{ki} csúcs lesz, egy uv irányított élből pedig egy $u_{ki}v_{be}$ irányítatlan él lesz. Ebben a páros gráfban egy teljes párosítás pont egy jó megoldásnak felel meg (ezt be kell bizonyítani!). A gráf a feltételek miatt k-reguláris, így van benne teljes párosítás, tehát kész vagyunk.