SzA II. gyakorlat

Barátkozás a gráfokkal

2010. szeptember 15/16.

1. **Hány éle van az n csúcsú teljes gráfnak?**
   $\binom{n}{2}$, mert egy élhez n csúcsból kell kettőt kiválasztani.

2. **Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?**
   A $\binom{n}{2}$ lehetséges él mindegyikéről függetlenül döntünk, hogy be legyen-e húzva, így $2^{\binom{n}{2}}$.

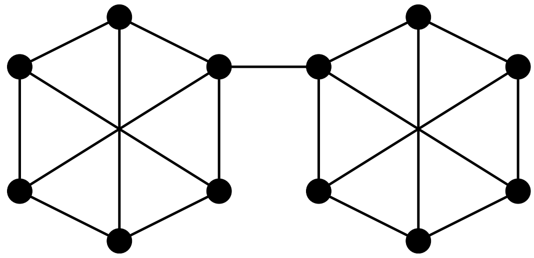
3. **[pótZH, 2008. december 5.] A K_6 gráf minden éléhez kiválasztunk 3 különböző számot az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazból. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is tesszük ezt, lesz két különböző él, amikhez ugyanazt a három számot választottuk.**
   A lehetséges különböző választások száma $\binom{5}{3} = 10$, az élek száma pedig $\binom{6}{2} = 15$, vagyis a skatulya-elv miatt legalább két él ugyanazokat a számokat kapja.

4. **Bizonyítsuk be, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros!**
   Tfh nem igaz, vagyis a páratlan fokszámú pontok száma páratlan. Ekkor írjuk fel a fokszámok összegét:
   $$\sum_{v \in V} d(v) = 2e,$$
   ahol a jobb oldalon egy páros szám áll. A bal oldal paritásában nem számítanak a páros fokszámok, így páratlan darab páratlan fokszám összege is páratlan, tehát a bal oldal páratlan, ami lehetetlen, tehát páros darab páratlan fokszámú pontnak kell lennie.

5. **Van-e olyan (legalább 2 pontú) egyszerű gráf, melyben minden pont foka különböző?**
   Mivel a legnagyobb fokszám $n - 1$ lehet, ezért $0 \dots n - 1$ fokú csúcsoknak kell lenni egy ilyen gráfban. Ha viszont van egy $n - 1$-ed fokú, akkor nem lehet 0 fokú, így nem létezhet ilyen egyszerű gráf.

6. **Igaz-e, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör?**
   Számozzuk meg a csúcsokat az $1 \dots n$ számokkal, és az élek mindig a kisebb sorszám felől a nagyobb felé legyenek irányítva. Tfh van kör, ami áthalad az i csúcson: ekkor sorban a kör csúcsai: $i < j < \cdots < k < i$, ami ellentmondás, tehát a gráfban nincs irányított kör.

7. **[pótZH, 2008. december 5.] Legfeljebb hány pontja lehet annak a 19 élű G gráfnak, amiben minden pont fokszáma legalább 3?**
   $\sum d(v) = 2e$, itt minden $d(v) \geq 3$, azaz $3n \leq 2e = 2 \cdot 19$, amiből $n \leq 12$. Ilyet viszont tudunk is csinálni (pl ábra), így tényleg 12.



8. **Igaz-e, hogy tetszőleges G egyszerű gráf esetén vagy G, vagy a komplementere összefüggő?**
   Igaz, mert egyszrészt ha G összefüggő, akkor kész vagyunk, ha pedig G nem összefüggő, akkor a komplementere az lesz (bizonyítás a következő feladatban).

9. **Egy gráf izomorf a komplementerével. Mutassuk meg, hogy összefüggő!**
   Tfh nem összefüggő. Ekkor léteznek olyan x és y csúcsok melyek különböző komponensben vannak, és a komplementerben közöttük nyilván vezet él. Vegyünk most egy tetszőleges harmadik z csúcsot: ha x és y közül egyikkel az eredeti gráfban nincs összekötve, akkor a komplementerben mindenképp egy komponensben lesz x-szel és y-nal is. Mindkettővel nem lehetett összekötve, mert akkor x és y nem lett volna különböző komponensben. Ezek alapján a komplementer összefüggő (tetszőleges két csúcs között vezet út), viszont egy összefüggő gráf nem lehet izomorf egy nem összefüggővel, így az eredeti gráfnak összefüggőnek kellett lennie.

10. **Rajzoljuk le az összes olyan fát, ami izomorf a komplementerével!**
    Tudjuk, hogy egy n csúcsú fának $n-1$ éle van, továbbá egy e élű gráf komplementerének $\binom{n}{2}-e$ éle van, két izomorf gráf éleinek száma pedig megegyezik. Így $n-1=\binom{n}{2}-(n-1)$, ahonnan $n=1$ vagy $n=4$, tehát csak 1 és 4 csúcsú fák jöhetnek szóba. Az egy csúcsú egyértelmű, és megnézve jó is. 4 csúcsú esetén az elsőfokú pontok száma lehet 2, így a 4 hosszú utat kapjuk, ami pont jó is. Ha az elsőfokú pontok száma 3 lenne, akkor a gráfot („csillag") felrajzolva látjuk, hogy nem jó. Más 4 csúcsú fa pedig nem lehet.

11. **Hány 60 csúcsú, 1768 élű, páronként nem izomorf egyszerű gráf létezik?** Vegyük észre, hogy K_{60}-nak pont 1770 éle lenne! Ebből a mi gráfunknak 2 éle hiányzik. Tehát a kérdés: K_{60}-ból hogy hagyhatunk el két élet? Egyik lehetőség, hogy egy csúcs két élét hagyjuk el, másik pedig az, ha a két élet két különböző csúcstól hagyjuk el. Más lehetőségünk nincs, különben izomorf gráfokat kapnánk. Tehát 2.

12. **Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő!**
    Tfh nem összefüggő. Ekkor nyilván legalább két komponense van. Vegyük a legkisebb (k) csúcsszámú komponensét, aminek legfeljebb $n/2$ csúcsa van (skatulya elv)! Mivel a gráf egyszerű, ezért ebben a komponensben a legnagyobb fokszám legfeljebb $k-1$ lehet, viszont $k-1 \le n/2-1$. Ennek a komponensnek a fokszámai tehát a feltétellel együtt a következőt kell, hogy teljesítsék: $n/2 \le d_i \le n/2-1$, ami lehetetlen.

13. **Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráf akkor és csak akkor fa, ha egy pontból áll vagy bármely két pontját pontosan egy út köti össze!**

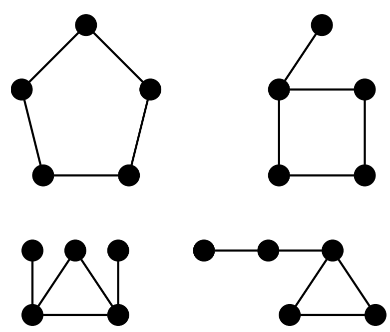
Egyik irány: akkor fa, ha egy pontból áll vagy bármely két pontját pontosan egy út köti össze. Ha egy pontból áll, akkor triviális. Ha több pontból áll, akkor ha két pontja között nem menne út, akkor nem lenne öf, tehát fa sem lehetne, ha pedig két pontja között több út is menne, akkor nem lenne körmentes, tehát szintén nem lehetne fa. Másik irány: ha bármely két pontját pontosan egy út köti össze, akkor fa. Tfh nem fa ekkor vagy nem öf, viszont akkor lenne két olyan pontja, ami között nem megy út, vagy van benne kör, viszont ekkor egy kör tetszőleges két pontja között legalább két út megy.

14. **Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n-3$!**
Tfh a másodfokú pontok száma $n-3$. Ekkor mivel van legalább két elsőfokú pont, már csak egy pont fokszáma kérdéses. Tudjuk, hogy $n-1$ él van, így a fokszámok összege $1+1+(n-3)\cdot 2+d=2e=2\cdot(n-1)$, ahonnan $d=2$ adódna, viszont ez ellentmond a feltételnek, hiszen $n-2$ másodfokú pont lenne.

15. **Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?**
Van levél, mondjuk k darab. Ekkor $l+(8-l)d=2\cdot 7=14$, ahol l a levelek száma és d a másik fokszám. Világos, hogy $2\le l\le 7$. Ebből az $l=2, d=2$, $l=5, d=3$ és az $l=7, d=7$ lehetséges.

16. **Bizonyítsuk be, hogy ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1-e_1+e_2$ és $T_2-e_2+e_1$ is fa.**
Az e_2-nek a T_2 azon útján kell lenni, ami az e_1 két végpontját összeköti. Ráadásul olyan él kell, ami a T_1-e_1 két komponense között halad. Az adott út az egyik komponensből indul, a másikban ér véget, szóval biztos lesz ilyen él, és az jó is.

17. **[ZH, 2006. március 28.] Rajzolja fel az összes olyan páronként nem izomorf egyszerű, összefüggő 5 pontú gráfot, amelyben pontosan egy kör van és a maximális fokszáma legfeljebb 3.**
A kör lehet, 5, 4 vagy 3 hosszú. 5 hosszú esetben csak C_5 jöhet szóba, több él esetén létrehoznánk extra kör(öke)t. 4 hosszú esetén a kimaradt csúcsot egy éllel hozzá kell kötni a körhöz, más élt nem vehetünk fel kör létrehozása nélkül. 3 hosszú kör esetén a két kimaradó pont közül vagy mindkettő a körön van rajta, vagy egy 2 hosszú út van a körön. További élek szintén nem vehetők fel, valamint mindkét körön kívüli csúcs a fokszámkorlát miatt nem kapcsolódhat ugyanahhoz a csúcshoz. Tehát:



18. **A következő gráfok közül soronként kettő izomorf. Melyek ezek?**
Első sor: első kettőnek négy, utolsónak 3 pontja van, így csak a 4 pontúak lehetnek izomorfak.
Második sor: az elsőben és utolsóban 4 harmadfokú pont van, míg a középsőben csak kettő, így első és utolsó lehet csak izomorf.
Harmadik sor: az elsőben és másodikban van negyedfokú pont, a harmadikban nincs. Így első kettő lehet csak izomorf. Negyedik sor: az utolsó kettőben a másodfokú pontok közül az egyik két negydfokúval, a másik két harmadfokúval szomszédos, míg az elsőben mindkét másodfokúnak van egy negyed- és harmadfokú szomszédja, így csak az utolsó kettő lehet izomorf.
Természetesen meg kéne adni az izomorfak között a hozzárendelést is!