SzA X. gyakorlat

Rendezkedünk, továbbá bevezetés a T-betűs szó világába

2010. november 10/11.

Hasznos tudnivalók

- Eldöntési problémákról beszélünk!
- $P \subseteq NP$, $P \subseteq coNP$. Tehát ha valami P-beli, akkor **biztos**, hogy NP-beli és $coNP$-beli is!!!
- **P-beliség bizonyítása**: adunk egy polinom idejű algoritmust. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát. Nem fontos a hatékonyság, n^{100} is polinomiális!
- **NP-beliség bizonyítása**: tanú mutatása, tanú mérete polinomiális, ellenőrzés polinomiális. **Nem kell algoritmus a tanú előállítására**!!! A tanú lehet pofátlanul egyszerű. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát.

Feladatok

1. Gondolkozzunk el az NP-beliség, $coNP$-beliség és P-beliség fogalmakon!
2. A valós számokból álló $a_1^2 \ldots a_n^2$ sorozat egy darabig nő, utána csökken. Adjunk egy legfeljebb $c \cdot n$ összehasonlítást használó algoritmust, ami rendezi az $a_1, \ldots a_n$ sorozat!
3. Adottak a $p_0 = (0,0), p_1 = (x_1, y_1), \ldots p_n = (x_n, y_n), p_{n+1} = (100, 0)$ pontok a síkban ($n \geq 1$) úgy, hogy $1 \leq i \leq n$ esetén x_i és y_i racionális számok, $0 < x_i < 100$, és semelyik három pont nem esik egy egyenesbe. Egyenes szakaszokkal akarjuk ezeket a pontokat valamilyen sorrendben összekötni úgy, hogy egy $n+2$ csúcsú zárt töröttvonalat kapjunk, amiben a behúzott szakaszok nem metszik egymást. Adjunk egy legfeljebb $c \cdot n \log n$ lépést használó algoritmust annak meghatározására, melyik pontot melyikkel kössük össze!
4. Szeretnénk n db SZA-hallgató ZH-ereményeit (csak az összpontszámot) növekvő sorrendben felsorolni. Adjunk erre $c \cdot n$ lépést felhasználó algoritmust!
5. Be tudjuk-e bizonyítani a következő problémák P, NP és $coNP$-beliségét? Az input egy $G(V, E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$).
   (a) Van-e G-ben legalább k hosszú kör? (k az input része.)
   (b) Kiszínezhetők-e G pontjai 2 színnel úgy, hogy legfeljebb 2 él kivételével minden él végpontjai különböző színűek?
   (c) Kiszínezhető-e G 4 színnel?
   (d) Van-e G-ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?
   (e) Van-e G-ben egy legalább k pontú teljes részgráf? (k az input része.)
   (f) Síkbarajzolható-e G?
   (g) Teljesül-e az Ore-feltétel?

(h) Van-e G-ben legfeljebb S súlyú (egyszerű) út? (S az input része.)

(i) Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?

(j) Van-e G-ben Euler-kör?

6. A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazzuk meg a feladathoz tartozó eldöntési problémát, és bizonyítsuk be, hogy NP-beli!

7. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! (Vagyis input: G és k; output: igen/nem). Hogy tudnánk ennek segítségével polinom időben meghatározni $\chi(G)$-t?

---

8. Van 3 algoritmusunk, amelyek n méretű input esetén rendre n^2, n^6 és 2^n lépés alatt végeznek a feladattal. Tegyük fel, hogy egy óra alatt tudunk mindegyikkel megoldani egy n méretű feladatot a számítógépünkön. Ha veszünk egy 100-szor olyan gyors gépet, melyik algoritmussal mekkora feladatot tudunk megoldani ugyanúgy 1 óra alatt?

9. Legalább hány összehasonlítás kell ahhoz, hogy egy n elemű tömbből egy olyan tagot találjunk meg, ami a tömb 10 legkisebb eleme közé tartozik?

10. Adottak a sík egész koordinátájú $P_1 = (x_1, y_1), \ldots, P_n = (x_n, y_n)$ koordinátájú pontjai. Javasoljunk egy legfeljebb $c{\cdot}n$ lépésszámú módszert olyan $P_i \neq P_j$ pontok kiválasztására, amelyeken átmenő egyenes által meghatározott félsíkok közül az egyik tartalmazza az összes pontot!

11. Adjunk $c{\cdot}n$ lépésszámú algoritmust n olyan egész számból álló sorozat rendezésére, melynek elemei az

    (a) $\{1, \ldots, 3n\}$ tartományba esnek!

    (b) $\{1, \ldots, n^7 - 1\}$ tartományba esnek!

12. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! A fentiek értelmében azt is megtudhatjuk polinom időben, hogy mennyi $\chi(G)$. Hogyan tudnánk kiszínezni polinom időben a gráfot $\chi(G)$ színnel?

13. Lássuk be, hogy a következő probléma NP-beli!

$$\pi = \left\{ (s_1, s_2, \ldots, s_n, b) \,\middle|\, \forall i\ s_i, b \in \mathbb{Z}^+; \exists j_1, \ldots, j_k\ (1 \leq k \leq n) : \sum_{l=1}^{k} s_{j_l} = b \right\}$$

14. Bizonyítsuk be, hogy P-beli az olyan négy színnel színezhető G gráfokból álló nyelv, melyekre igaz, hogy G csúcsai kiszínezhetők a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék!