

# SzA konzultáció

2009. október 14.

1. Bizonyítsuk be, hogy  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ !
2. Bizonyítsuk be, hogy fel tudunk menni egy végtelen lépcsőn!
3. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

4. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. Bizonyítsuk be, hogy egy csoportban mindig van legalább két olyan ember, akik ugyanannyi embert ismernek a csoportból! (Az ismeretségek kölcsönösek.)
6. Bizonyítsuk be, hogy az első  $n$  páratlan szám összege éppen  $n^2$ !
7. Bizonyítsuk be, hogy egy számtani sorozatban  $a_n = a_1 + (n-1)d$  és

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

8. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok prímszám van!
9. Igazoljuk, hogy öt darab, 10-nél nagyobb prím között lenni kell kettőnek, amik különbsége osztható 10-zel!
10.  $2k$  villanykaros áll egy sorban, egy fiú, egy lány módon (na jó, vegyész vagy építész is lehet közöttük). Mindenki egy üres söröskorsót tart a kezében, fejjel felfele. Időnként két szomszédos ember kicseréli a korsóját, és mindketten megfordítják. Ha megunták ezt az egészet, akkor a lányok megfordítják a korsóikat. Hány fejjel lefele álló korsó lesz a végén?
11. Egy autóval át akarunk kelni a sivatagon. A sivatag szélén tetszőleges mennyiségű üzemanyagot találunk, a sivatagban jelenleg nincs üzemanyag. Egy tankolással nem tudunk átkelni, de lehetőségünk van lerakatokat készíteni a sivatagban (de csak az autó tankjában tudunk üzemanyagot szállítani). Lehetséges-e a sivatagon az autóval átkelni?
12. Két kupac gyufánk van. A következőképp rakogatjuk: az egyikből elveszünk valamennyit, a másikba viszont kétszer annyit teszünk. Elérhető-e valamennyi rakogatás után, hogy ugyanannyi szál gyufa legyen mindkét kupacban, ha eredetileg az egyikben 1, a másikban 2 szál volt?
13. Tekintsük a következő  $P(n)$  állítást: egy  $n$  fantomból álló olyan csoport, amiben van egy skót fantom kizárólag skót fantomokat tartalmaz.  
 $P(1)$  triviálisan igaz.  
Most tegyük fel, hogy  $P(m)$  igaz valamilyen  $m$ -re. Legyen  $G$  egy  $m+1$  fantomból

álló csoport, amiben van egy skót fantom. Jelölje  $x$  ezt a skót fantomot. Ha  $x$ -hez hozzáveszünk  $G$ -ből  $m - 1$  másik fantomot, akkor az így kapott  $H$  csoport egy  $m$  fantomból álló csoport lesz, amiben van egy skót fantom. Mivel  $P(m)$  igaz, így  $H$ -ban csak skót fantomok vannak. Legyen  $y$  az a fantom, akit kihagytunk  $H$ -ból.  $y$  és  $m - 1$  fantom  $H$ -ból egy olyan  $m$  tagú  $K$  fantomcsoportot alkot, amiben van legalább egy skót fantom, hiszen  $H$ -ban csak skót fantomok vannak, így az indukciós feltevést ismét használva biztosak lehetünk benne, hogy  $y$  is skót fantom, tehát  $G$  kizárólag skót fantomokból áll.

**Hol a hiba?** (Ez a gondolatmenet kicsit más megfogalmazásban amúgy a ló-paradoxon, lásd wikipedia.)