

SzA IX. gyakorlat

$P?NP$, és a T-betűs szó

2009. november 4.

1. Van 3 algoritmusunk, amelyek n méretű input esetén rendre n^2 , n^6 és 2^n lépés alatt végeznek a feladattal. Tegyük fel, hogy egy óra alatt tudunk mindegyikkel megoldani egy n méretű feladatot a számítógépünkön. Ha veszünk egy 100-szor olyan gyors gépet, melyik algoritmussal mekkora feladatot tudunk megoldani ugyanúgy 1 óra alatt?

n^2 : ugyanannyi időnk van mindkét esetben, tehát $n_1^2 = 100n^2$, amiből gyökvonással $n_1 = 10n$, vagyis 10-szer akkorát.

n^6 : ugyanígy, $n_1^6 = 100n^6$, amiből $n_1 = \sqrt[6]{100}n \approx 2.15$, vagyis alig több, mint kétszer akkorát.

2^n : a felírás ugyanez, $2^{n_1} = 100 \cdot 2^n$, amiből logaritmussal és ennek azonosságával $n_1 = n + \log 100 \approx n + 6.64$, azaz nem szorzódik a méret, hanem csak kb 6.64-gyel nagyobb méretű inputra fog ugyanennyi idő alatt lefutni.

2. Gondolkozzunk el az NP -beliség, P -beliség és NP -teljesség fogalmakon!

De tényleg!

3. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! (Vagyis input: G és k ; output: igen/nem). Hogy tudnánk ennek segítségével polinom időben meghatározni $\chi(G)$ -t?

Legegyszerűbben megérthető (nem a leggyorsabb) megoldás: kezdjük el egy színtől kezdve megkérdezni, hogy ennyivel kiszínezhető-e. Definíció szerint a kromatikus szám az első olyan érték lesz, amire a válasz igen. Ez polinomiális, hiszen legfeljebb n -szer kell kérdezni, és $n \cdot P(n)$ ($P(n)$ jelölést használok n polinomjára) még mindig polinom. (Amúgy bináris keresést lenne érdemes használni.)

4. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! A fentiek értelmében azt is megtudhatjuk polinom időben, hogy mennyi $\chi(G)$. Hogyan tudnánk kiszínezni polinom időben a gráfot $\chi(G)$ színnel?

Vegyünk fel G mellé egy $K_{\chi(G)}$ -t! Ezek pontjai felelnek meg az egyes színeknek. G minden egyes pontjához próbáljuk meg hozzárendelni a lehetséges színeket! Az i ponthoz az a színt úgy rendeljük hozzá, hogy $K_{\chi(G)}$ minden csúcsát hozzánkötjük i -hez a kivételével (ezzel biztosítjuk, hogy i és a egyforma színű legyen). Az első olyan hozzárendelés az i csúcsához, ahol a keletkező gráf még mindig színezhető $\chi(G)$ színnel, jó is, hiszen a még nem színezett pontok színezését így biztos nem rontottuk el. A behúzott éleket hagyjuk meg. Sikertelen hozzárendelés (a keletkező gráf nem színezhető χ_G színnel) esetén az aktuális új éleket töröljük, és a következő színnel próbálkozunk. Egy kérdés feltevése továbbra is polinomiális, hiszen legfeljebb $2n$ csúcsa van az új gráfnak, és $P(2n)$ szintén $P(n)$, továbbá mind az n csúcsra legfeljebb n kérdést teszünk fel, így $n^2 \cdot P(n)$ továbbra is polinomiális.

5. **Mi az alábbi problémák bonyolultsága, ha az input egy $G(V, E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$)? Természetesen bizonyítsuk is be!**
- (a) **Van-e G -ben legalább k hosszú kör?** (k az input része.) NP -beli, mer tanú egy ilyen kör (méret, ellenőrzés polinomiális, ezt biz be!), továbbá NP -nehéz, mert H -kör $\prec \pi$ úgy, hogy van-e H -kör kérdést úgy tesszük fel, hogy van-e legalább n hosszú kör (biz be, hogy jó!), átalakítás lényegében nincs is, tehát poli, előzőekből pedig következik, hogy NP -teljes.
 - (b) **Kiszínezhetők-e G pontjai 2 színnel úgy, hogy legfeljebb 2 él kivételével minden él végpontjai különböző színűek?** Polinomiális, hiszen hagyjunk el az összes lehetséges $\binom{n}{2}$ módon két élet, a maradékról ellenőrizni lehet poli időben, hogy két színnel színezhető-e, és ha legalább egy ilyen elhagyás jó, akkor jó. Ez legfeljebb $n^2 \cdot P(n)$ lépés, ami poli.
 - (c) **Kiszínezhető-e G 4 színnel?** NP -beli, tanú egy jó színezés (méret, ellenőrzés polinomiális, ezt biz be!). NP -nehéz, mert létezik $3SZÍN \prec 4SZÍN$ így: ha G -ről megkérdezzük, hogy színezhető-e 3 színnel, akkor vegyünk hozzá egy pontot, és ezt kössük össze minden G -belivel, így kapjuk G' -t. Áll: G színezhető 3 színnel $\Leftrightarrow G'$ színezhető 4 színnel. Egyik irány: ha G színezhető 3 színnel, akkor az ő pontjait színezzük G' -ben az eredeti színükkel, az extra pontnak meg biztos jó az eddig nem használt negyedik szín, tehát G' -nek találtunk egy jó 4 színnel színezést. Másik irány: ha G' színezhető 4 színnel, akkor az extra pont (mivel mindenkivel össze van kötve) biztos különböző színű, mint a többi. A maradéknak tehát elég 3 szín, ez viszont pont G -re egy 3 színnel színezés. Az átalakítás polinomiális, hiszen 1 pontot és n élet veszünk hozzá az eredeti gráfhoz. Fentiek alapján tehát NP -teljes.
 - (d) **Van-e G -ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?** P -beli, hiszen ezt meg tudjuk mondani, ha megnézzük az összes lehetséges 15 pontú feszített részgráfját, amiből $\binom{n}{15}$ van, ami $\leq n^{15}$, valamint egy ellenőrzés konstans idő (15 lépés).
 - (e) **Van-e G -ben egy legalább k pontú teljes részgráf?** (k az input része.) Ez maga a MAXKLIKK probléma, tehát NP -teljes.
 - (f) **Van-e G -ben legalább $n/100$ hosszúságú kör?** NP -teljes, tanú egy ilyen kör (poli ell, poli méret), valamint van H -körről Karp-redukció ($99n$ izolált pont hozzávétele kell).
 - (g) **Teljesül-e az Ore-feltétel?** P -beli, hiszen minden csúcs fokszámára meg kell nézni, hogy $\geq \frac{n}{2}$, ami legfeljebb n lépés.
 - (h) **Van-e G -ben legfeljebb S súlyú (egyszerű) út?** (S az input része.) NP -teljes, ugyanis: NP -beli, tanú egy ilyen út (poli ell, poli méret). NP -nehéz, mert H -út $\prec \pi$, ugyanis ha G -ben van-e H -út kérdést kapjuk, akkor adjunk minden élnek -1 súlyt, és kérdezzük meg, hogy az így keletkezett G' -ben van-e legfeljebb $-(n-1)$ súlyú út? Ha G -ben van H -út, akkor ez G' -ben pont egy $-(n-1)$ súlyú út. Ha G' -ben van $-(n-1)$ súlyú út, akkor ez csak $n-1$ élből állhat össze, és egy $n-1$ élű út az pont H -út, vagyis G -ben biztos van H -út. A súlyok felvétele nyilván poli.
 - (i) **Van-e G -ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?** Ez a H -út, máshogy megfogalmazva.

- (j) **Van-e G -ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális foksám legfeljebb 3?** NP -teljes, ugyanis: NP -beli, mert tanú egy ilyen feszfa (méret és ell poli!). NP -nehéz, mert H -út $\prec \pi$ (az előző feladat megfogalmazását fogjuk használni). Ha a kérdés, hogy G -ben van-e legfeljebb másodfokú pontokból álló feszfa, akkor G minden csúcsához vegyünk fel egy elsőfokú pontot (ami az adott csúccsal van összekötve), ez legyen G' ! Ha G -ben van legfeljebb másodfokú csúcsokból álló feszfa, akkor ezt a feszfát G' -ben kiegészíthejük egy legfeljebb harmadfokú csúcsokat tartalmazó feszfává úgy, hogy az extra elsőfokú pontokba vezető éleket hozzávesszük (így minden foksám pontosan eggyel nő). Ha G' -ben van legfeljebb harmadfokú csúcsokat tartalmazó feszfa, akkor az extra csúcsokba nyilván csak az egyetlen beléjük futó él lehet kiválasztva. Ha ezeket az éleket elhagyjuk, akkor minden foksám eggyel csökken, tehát az extra pontok nélküli gráfrészben a feszfát nem rontjuk el, viszont minden foksám eggyel csökkent, tehát csak max 2 lehet, de így pont G -ben kaptunk egy max másodfokú csúcsokból álló feszfát. n csúcs és él felvétele nyilván poli.

6. **Lássuk be, hogy a következő probléma NP -beli!**

$$\pi = \left\{ (s_1, s_2, \dots, s_n, b) \mid \forall i \ s_i, b \in \mathbb{Z}^+; \exists j_1, \dots, j_k \ (1 \leq k \leq n) : \sum_{l=1}^k s_{j_l} = b \right\}$$

Tanú: legfeljebb n szám, a $j_1 \dots j_k$ indexek. Az általuk indexelt súlyokat összeadva (poli idő) el tudjuk dönteni, hogy az összegük tényleg b -t ad-e.

7. **Bizonyítsuk be, hogy P -beli az olyan négy színnel színezhető G gráfokból álló nyelv, melyekre igaz, hogy G csúcsai kiszínezhetők a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék!**

A piros és kék színeket legfeljebb $n \binom{n-1}{2}$ féle módon oszthatjuk ki, ami polinomiális. Minden kiosztáshoz a maradék gráfot két színnel kell színezni, ami P -beli feladat. Így polinomszor kell egy polinom költségű algoritmust futtatni, ami polinom időben megy.

8. **A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Cé-lunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Adjuk meg a feladathoz tartozó L nyelvet, majd adjunk Karp-redukciót a H -út nyelvről L -re!**

A nyelv:

$$L = \left\{ (G, k) \mid \begin{array}{l} G \text{ irányítatlan csúcssúlyozott gráf, amiben van} \\ \text{legfeljebb } k \text{ levélsúlyú feszítőfa} \end{array} \right\}$$

Ez NP -teljes. NP -beli, mert egy jó tanú egy ilyen feszítőfa (ellenőrzés polinom időben megy, a mérete is polinom). Adunk egy H -út $\prec L$ Karp-redukciót. Ha egy G gráfban Hamilton-utat keresünk, akkor minden csúcsához rendeljük 1 súlyt, és az így keletkezett G' gráfban keressünk legfeljebb 2 levélsúlyú feszítőfát! Állítás: $G \in H\text{-út} \Leftrightarrow (G', 2) \in L$. $G \in H\text{-út} \Rightarrow (G', 2) \in L$: G egy Hamilton-útja pont egy két levelű, 2 súlyú feszítőfa G' -ben. $(G', 2) \in L \Rightarrow G \in H\text{-út}$: egy ilyen feszítőfának pontosan 2 levele kell, hogy legyen (ha több lenne, nagyobb lenne a súlya, egy fában pedig mindig van legalább 2 levél). Ez pedig pont egy olyan

utat jelent, ami tartalmazza a gráf összes csúcsát, tehát G egy Hamilton-útját. A csúcsoknak súlyt adni lehet polinom időben.

9. **[ZH 2008. november 17.] Bizonyítsuk be, hogy NP-teljes az a π döntési probléma, aminek a bemenete egy $100n$ pontú irányítatlan gráf, a kimenete pedig pontosan akkor „igen”, ha G -nek van legalább n pontú köre.**

NP-beli: Tanú egy ilyen kör, ellenőrizni kell, hogy a gráf tényleg $100n$ pontú-e, és a kör tényleg kör-e és n pontú-e. A tanú mérete n ami $100n$ polinomja, az ellenőrzés legfeljebb n lépés után végetér, tehát ez is polinomiális.

NP-nehéz, mert H -kör $\prec \pi$. Adott G gráfhoz vegyünk hozzá $99n$ pontot, ez G' . Van H -kör G -ben $\Leftrightarrow$ van n pontú kör G' -ben. Van H -kör G -ben $\Rightarrow$ van n pontú kör G' -ben: tfh van H -kör G -ben, akkor ez pont egy n pontú kör G' -ben, ami $100n$ csúcsú, vagyis a feltétel teljesül. Van H -kör G -ben $\Leftarrow$ van n pontú kör G' -ben: az izolált pontokon nyilván nem mehet át a kör, tehát csak az eredeti gráfban mehet, de G -ben egy n hosszú kör pont H -kör. $99n$ pont felvétele polinom idő, tehát az átalakítás polinomiális.

A probléma *NP*-beli és *NP*-nehéz, tehát *NP*-teljes.

10. **[PZH 2008. december 5.] Bizonyítsuk be, hogy NP-teljes az a π döntési probléma, aminek a bemenete egy egyszerű G gráf, az n és m számok, a kimenete pedig pontosan akkor „igen”, ha G -nek van olyan n csúcsú részgráfja, aminek legalább m éle van.**

NP-beli: tanú egy ilyen részgráf, mérete nem lehet nagyobb a gráfénál, tehát polinomiális, az ellenőrzés pedig azt jelenti, hogy megnézzük, hogy tényleg részgráf-e, valamint a csúcsok és élek száma rendben van-e, ez nyilván polinomiális.

NP-nehéz, mert $MAXKLIKK \prec \pi$. Ha G -ben valaki megkérdezi, hogy van-e k pontú klikk, akkor kérdezzük meg G -ről, hogy van-e benne k pontú és $\binom{k}{2}$ élű részgráf. G -ben van k pontú klikk $\Leftrightarrow G$ -ben van k pontú és $\binom{k}{2}$ élű részgráf. G -ben van k pontú klikk $\Rightarrow G$ -ben van k pontú és $\binom{k}{2}$ élű részgráf: G egy k pontú klikkje pont megfelelő. G -ben van k pontú klikk $\Leftarrow G$ -ben van k pontú és $\binom{k}{2}$ élű részgráf: ez a részgráf G egyszerűsége miatt nyilván csak a K_k lehet, ami def szerint egy k pontú klikk G -ben. Az átalakításhoz csak $\binom{k}{2}$ -t kell kiszámolni, ami nyilván polinom idő.

A probléma *NP*-beli és *NP*-nehéz, tehát *NP*-teljes.