SzA IX. gyakorlat

$P?NP$, és a T-betűs szó

2009. november 4.

Hasznos tudnivalók

- Eldöntési problémákról beszélünk!
- $P \subseteq NP$, $P \subseteq coNP$. Tehát ha valami P-beli, akkor **biztos**, hogy NP-beli és $coNP$-beli is!!!
- P**-beliség bizonyítása**: adunk egy polinom idejű algoritmust. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát. Nem fontos a hatékonyság, n^{100} is polinomiális!
- NP**-beliség bizonyítása**: tanú mutatása, tanú mérete polinomiális, ellenőrzés polinomiális. **Nem kell algoritmus a tanú előállítására**!!! A tanú lehet pofátlanul egyszerű. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát.
- NP**-teljesség bizonyítása** L problémára:
  1. L NP-beliségének bizonyítása.
  2. L NP-nehézségének bizonyítása:
     (a) Találunk egy vele kapcsolatba hozható problémát, ami ismerten NP-teljes, ez legyen I.
     (b) Bemutatunk egy $I \prec L$ Karp-redukciót, az irány **eszméletlenül fontos**! Azaz van egy I-beli kérdésünk (**nem az aktuális probléma**, hanem egy ismerten nehéz!), azt átalakíthatjuk, és átalakítva bedobjuk az L-et (az egyelőre ismeretlen nehézségű problémát) megoldó fekete dobozba, és ez a válasz lesz az eredeti kérdésünkre is a válasz! Tehát az átalakítást kell megadni, arra jár a pont.
     (c) Bizonyítjuk a Karp-redukció helyességét. Azaz, ha f az átalakítás: $x \in I \Leftrightarrow f(x) \in L$ a bizonyítandó. Figyelem! **Két bizonyítás**, akkor és csak akkor, „$\Leftrightarrow$”!
     (d) Belátjuk, hogy f polinom időben elvégezhető.

Feladatok

1. Van 3 algoritmusunk, amelyek n méretű input esetén rendre n^2, n^6 és 2^n lépés alatt végeznek a feladattal. Tegyük fel, hogy egy óra alatt tudunk mindegyikkel megoldani egy n méretű feladatot a számítógépünkön. Ha veszünk egy 100-szor olyan gyors gépet, melyik algoritmussal mekkora feladatot tudunk megoldani ugyanúgy 1 óra alatt?
2. Gondolkozzunk el az NP-beliség, P-beliség és NP-teljesség fogalmakon!
3. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! (Vagyis input: G és k; output: igen/nem). Hogy tudnánk ennek segítségével polinom időben meghatározni $\chi(G)$-t?

4. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! A fentiek értelmében azt is megtudhatjuk polinom időben, hogy mennyi $\chi(G)$. Hogyan tudnánk kiszínezni polinom időben a gráfot $\chi(G)$ színnel?

5. Mi az alábbi problémák bonyolultsága, ha az input egy $G(V, E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$)? Természetesem bizonyítsuk is be!

   (a) Van-e G-ben legalább k hosszú kör? (k az input része.)

   (b) Kiszínezhetők-e G pontjai 2 színnel úgy, hogy legfeljebb 2 él kivételével minden él végpontjai különböző színűek?

   (c) Kiszínezhető-e G 4 színnel?

   (d) Van-e G-ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?

   (e) Van-e G-ben egy legalább k pontú teljes részgráf? (k az input része.)

   (f) Van-e G-ben legalább $n/100$ hosszúságú kör?

   (g) Teljesül-e az Ore-feltétel?

   (h) Van-e G-ben legfeljebb S súlyú (egyszerű) út? (S az input része.)

   (i) Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?

   (j) Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3?

6. Lássuk be, hogy a következő probléma NP-beli!

$$\pi = \left\{ (s_1, s_2, \ldots, s_n, b) \middle| \forall i \; s_i, b \in \mathbb{Z}^+; \exists j_1, \ldots, j_k \; (1 \leq k \leq n) : \sum_{l=1}^{k} s_{j_l} = b \right\}$$

7. Bizonyítsuk be, hogy P-beli az olyan négy színnel színezhető G gráfokból álló nyelv, melyekre igaz, hogy G csúcsai kiszínezhetők a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék!

8. A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Adjuk meg a feladathoz tartozó L nyelvet, majd adjunk Karp-redukciót a H-út nyelvről L-re!

9. **[ZH 2008. november 17.]** Bizonyítsuk be, hogy NP-teljes az a π döntési probléma, aminek a bemenete egy $100n$ pontú irányítatlan gráf, a kimenete pedig pontosan akkor „*igen*”, ha G-nek van legalább n pontú köre.

10. **[PZH 2008. december 5.]** Bizonyítsuk be, hogy NP-teljes az a π döntési probléma, aminek a bemenete egy egyszerű G gráf, az n és m számok, a kimenete pedig pontosan akkor „*igen*”, ha G-nek van olyan n csúcsú részgráfja, aminek legalább m éle van.