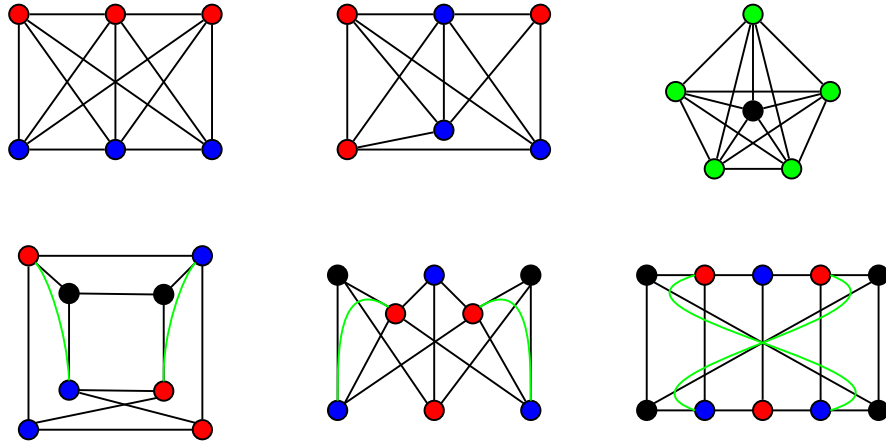


SzA VII. gyakorlat

Belerajzolunk a síkba

2009. október 21.

1. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



Egyik sem, egy kivételével mindegyikben egy $K_{3,3}$ bújik meg. Pirossal vannak jelölve a házak, kékkel a kutak, zölddel pedig az összevonásokkal képződő élek.

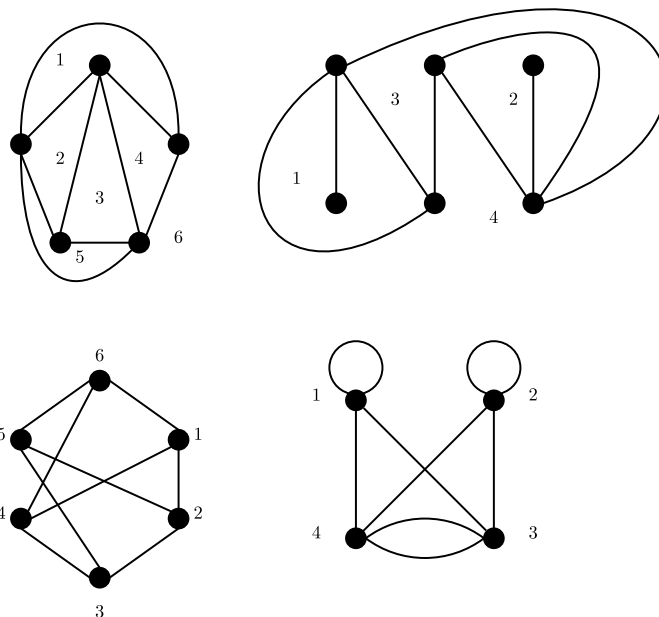
2. Mutassuk meg, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6!

Síkbarajzolható egyszerű gráfok esetén $e \leq 3n - 6$, és ebben az esetben $n\delta(G) \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2e$, de tudjuk, hogy $\delta(G) = 6$, tehát $e \geq 3n$, ami ellentmondás.

3. Hány csúcsa van egy összefüggő, 4-reguláris síkgráfnak, ha síkbarajzolásakor 10 tartomány keletkezik?

Az Euler-formula alapján $(n + t = e + 2) \ n = 8$.

4. Készítsük el az alábbi gráfok duálisát!

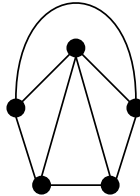


Az ábrán látható.

5. Legyen G egy 20 pontú, összefüggő, 3-reguláris síkgráf. Hány pontja van G duálisának, G^* -nak?

A duális pontjainak száma pont G területeinek számával lesz egyenlő, emi az Euler-formula alapján 12.

6. Mutassunk egy olyan egyszerű G gráfot, melynek 5 pontja van, és izomorf a duálisával!



7. Egy nemzetközi konferencián 5 ország egy-egy képviselője ül asztalhoz. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos!

Feltesszük, hogy az országok összefüggőek, valamint a világ nem tórusz alakú. Feleltessünk meg egy gráfban minden országnak egy csúcsot, és akkor legyen összekötve két csúcs, ha a két ország szomszédos egymással. Ennek a gráfnak síkbarajzolhatónak kell lennie. Ha viszont mindenki szomszédos lenne mindenkivel, akkor a gráf nem lenne síkbarajzolható, mert K_5 lenne.

8. Legyen G egy egyszerű síkgráf, melynek n pontja, e éle és c darab összefüggő komponense van. A síkbarajzolása során t darab tartomány keletkezik. Bizonyítsuk be, hogy $n - e + t = c + 1$.

Teljes indukcióval c -re. $c = 1$ -re pont az Euler-formulát kapjuk, ezután pedig meg kell nézni, hogyan változik n , e és t értéke, ha c komponenshez hozzáveszünk még egyet.

9. Rajzoltam egy n csúcsú fát, de elveszítettem. Rajzoljuk le a duálisát! Egy pont, $n - 1$ hurokkel. Ez azért van így, mert a fában nincs kör, tehát egy tartománya van, továbbá az $n - 1$ él mindegyike ezen egy tartomány között fut.

10. [ZH 2008. november 17] Határozzuk meg mindazon egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható G gráfokat, amiknek létezik olyan G^* duálisuk, hogy $G \cong G^*$ teljesül, továbbá $e = n + 2$ áll, ahol e a G éleinek, n pedig G csúcsainak számát jelöli.

Az izomorfia miatt $n^* = n$, a duális definíciója miatt pedig $n^* = t$, tehát az Euler-formula, az előzőek, és a feltétel alapján $n + t = e + 2 = n + n = n + 2 + 2$, ahonnan $n = 4$ és $e = 6$. Mivel egyszerű gráfról van szó, ezért nem lehetnek többszörös- és hurokélek, a K_4 -nek pedig pont 6 éle van, így ha létezik ilyen gráf, akkor az csak a K_4 lehet. K_4 -et síkbarajzolva és elkészítve a duálisát láthatjuk, hogy jó, tényleg izomorfak.