

SzA VI. gyakorlat

Színezünk

2009. október 14.

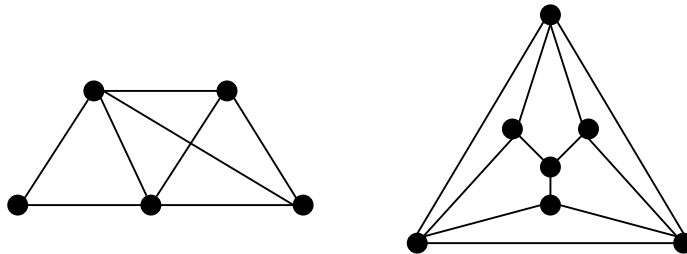
Juhé, ZH! 2009. október 19., hétfő, 17:15-18:55

CH max	A-Ké
CH C14	Ki-Mü
ST nagy	N-Sze
F2 E	Szi-Zs

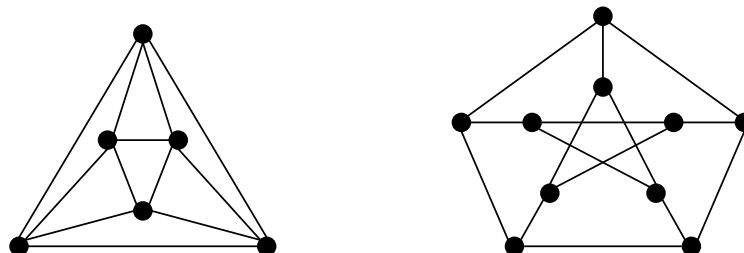
Feladatok

1. Mennyi a következő gráfok kromatikus száma:

C_4 , C_5 , $K_{2,4}$,



2. Egy gráf csúcsai legyenek egy $n * n$ -es sakktábla mezői, ahol $n \geq 2$. Az éleket alkossák az (oldalukkal) szomszédos mezőkből álló párok! Mennyi az így kapott gráf kromatikus száma?
3. G csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos G -ben, ha egymásból bátyával egy lépésben elérhetők. Mennyi G kromatikus száma?
4. Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1 + 2e/n!$
5. Mennyi az alábbi gráfok élkromatikus száma?



6. Legyen G egy 3-reguláris gráf, amire $\chi_e(G) = 3$. Tudjuk továbbá, hogy G éleinek (a színek egymás közötti permutációjától eltekintve) egyetlen jó három színnel való színezése létezik. Van-e G -ben Hamilton-kör?
7. Mycielski-konstrukciót használva rajzoljunk olyan M_k gráfokat, ahol $\omega(M_k) = 2$, $\chi(M_k) = k$, $k = \{2, 3, 4\}$! De tényleg, a szabályt használva, gyakorlás miatt!

8. Jelölje M_k a Mycielski-konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k . Milyen k értékekre tartalmaz M_k Euler-kört?
9. **[PZH 2008. december 5.]** Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges 3-kromatikus, 100 csúcsú G gráfnak van 67 olyan csúcsa, amik páros gráfot feszítenek.

10. Legyen G egy egyszerű gráf, amire $\chi(G) = k$. Tekintsük G -nek egy k színnel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszédságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!
11. Bizonyítsuk be, hogy minden n pontú gráfra $\chi(G) \leq 1 + n - \alpha(G)$!
12. Legyen G olyan (irányítatlan) gráf, melynek kromatikus száma k . Bizonyítsuk be, hogy ekkor G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon!
13. Legyen G 100-reguláris gráf 2001 ponton. Határozzuk meg $\chi_e(G)$ értékét!
14. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges egyszerű G gráfra $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$!
15. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan $\chi(G)$ színnel való színezése, melyben az egyik színosztály pontosan $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?
16. Adjuk példát minden $k \geq 2$ pozitív egész esetén olyan G_k gráfra, melynek kromatikus száma 2, de megadható a csúcsainak olyan sorrendje, hogy azokat e sorrendben színezve k színt fogunk használni! (G_k -nak tetszőleges számú csúcsa és éle lehet, mi választhatjuk meg.)
17. Legyen G olyan gráf, melynek kromatikus száma k . Legyen $A \subseteq V(G)$ a csúcsok egy olyan részhalmaza, melyben tetszőleges két pont távolsága legalább négy (két pont távolsága a közöttük vezető utak közül a minimális élszámú). Mutassuk meg, hogy az A -beli csúcsok tetszőleges $k + 1$ színnel való színezése kiterjeszthető az egész G gráf $k + 1$ színnel való színezésévé! (Kiterjesztésen azt értjük, hogy a keresett színezésnél az A -beli csúcsok a megadott $(k + 1)$ -színezésük szerinti színt kapják.)