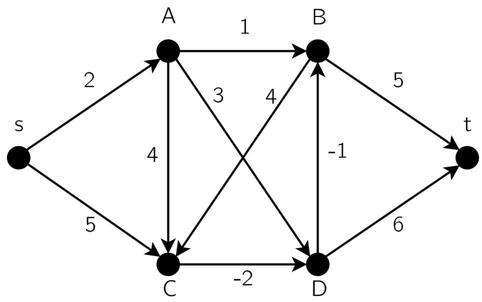
SzA IV. gyakorlat

Még utak, ezen kívül folyamok

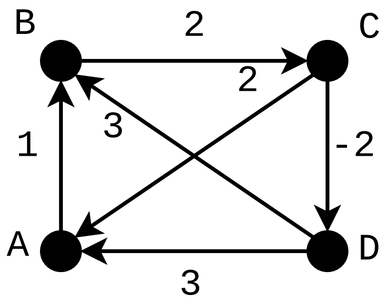
2009. szeptember 30.

1. **Határozzuk meg a Bellmann-Ford algoritmussal a legrövidebb utat s és t között, nyomon követve az algoritmust!**



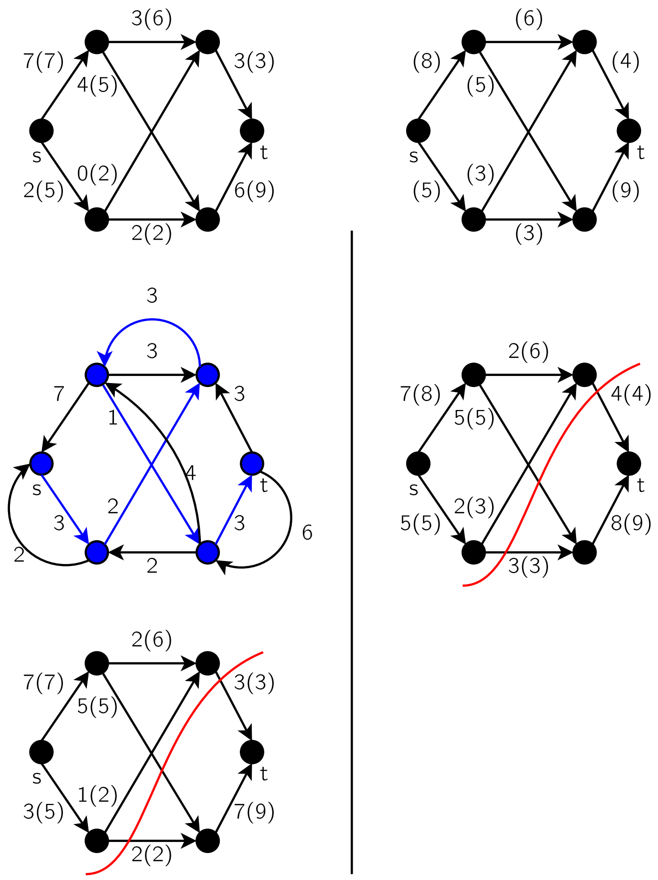
Lásd könyv, előadás, animáció.

2. **Határozzuk meg a Floyd algoritmussal a legrövidebb utat az összes pontpár között!**



Lásd könyv, előadás, animáció.

3. **Növeljük a bal oldali gráfban a megadott folyamot, ha ez lehetséges, vagy mutassuk meg, hogy ez már egy maximális folyam!**
   Az eredeti alatt a javítógráf egy javítóúttal, utána a végeredmény, egy minimális vágással együtt.



4. **Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást a fenti jobb oldali gráfban!**
   A végeredmény van felrajzolva, minimális vágással együtt.

5. **Egy kisváros úthálózata csupa egyirányú utcából áll. A polgármester minden hétköznap reggel autóval megy otthonról a városházára. A fejébe veszi, hogy úgy szeretné ezt megtenni, hogy minden utcán egy hét alatt legfeljebb egyszer menjen végig (a hazafelé utak nem számítanak). Adjunk meg olyan algoritmust, mellyel a kisváros térképe alapján eldönthető, hogy megtehető-e ez!**
   eleltessünk meg egy hálózatot a kisváros térképének! Az élek az utcák megfelelő irányítással, a kezdőpont (s) a ház, a végpont (t) a polgármesteri hivatal. Legyen minden él kapacitása 1! Ekkor pontosan akkor létezik 5 éldiszjunkt út, ha létezik s és t között egy legalább 5 értékű folyam. Ezt a javító utas algoritmussal könnyű ellenőrizni.

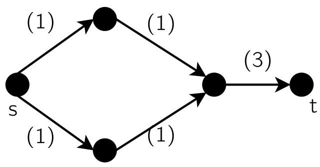
6. **Hogyan lehet maximális folyamot keresni egy olyan hálózatban, ahol a csúcsoknak is van kapacitásuk?**
   Minden csúcsot szedjünk szét két csúcsra, és közéjük vegyünk fel egy élet a csúcs kapacitásával. A bejövő éleket vezessük abba a csúcsba, amiből kiindul az új él, a kimenők pedig a másikból induljanak.

7. **Adott két hálózat $(G_1; s_1; t_1; c_1)$ és $(G_2; s_2; t_2; c_2)$, melyeknek a csúcshalmazai diszjunktak. Legyen az elsőben f_1, a másodikban f_2 a maximális folyam értéke. Mekkora lesz a maximális folyam abban a hálózatban, amelyet ezekből soros- $(t_1 = s_2, s = s_1, t = t_2)$ illetve párhuzamos $(s = s_1 = s_2, t = t_1 = t_2)$ összekapcsolással kapunk?**

Soros kapcsolás esetén G_1-ben lévő és a G_2-ben lévő minimális vágás továbbra is vágás marad az eredményül kapott G-ben, náluk kisebb vágás nem keletkezhet, így $f = \min\{f_1, f_2\}$. Párhuzamosnál nem kaphatunk kisebb vágást, mint amikor a két gráfból egyenként a mininálisat vesszük, tehát az G-ben a minimális vágás az f_1-hez és f_2-höz tartozók uniója lesz, így $f = f_1 + f_2$.

---

8. **Igaz-e, hogy ha egy hálózatban minden él kapacitása páratlan szám, akkor van olyan maximális folyam, aminek minden élén a folyam értéke páratlan szám? És ha páros?**
Az első nem igaz, ellenpélda alant. A második igaz, mert ha minden élnek páros a kapacitása, és kezdetben egy 0 értékű folyamból indulunk, akkor a javítóutas algoritmus minden lépésben páros számmal változtatja a folyamértéket.



9. **Legyenek egy gráf pontjai az n hosszúságú $0-1$ sorozatok. Vezessen egy irányított él a-ból b-be, ha a-ban kevesebb 1-es van, mint b-ben, és legyen egy ilyen él kapacitása az egyesek számának különbsége. Legyen F_n a maximális folyam értéke $s = (0, \ldots, 0)$ és $t = (1, \ldots, 1)$ között. Mennyi F_3? Mennyi általában F_n?**
$F_3 = 9$, mert egy ilyen folyam pl: a 000 és 111 között 3 érték mehet, a 000-ból 1 érték megy minden 2 egyest tartalmazóhoz, ahonnan ez tovább tud menni 111-be, végül hasonlóan $000 \to 001 \to 111$, ilyen típusúból is 3 van. A $\{s, 011, 101, 110\}, \{001, 010, 100, t\}$ vágás pedig pont 9 értékű. F_n-re először meg kell sejteni, majd adni általánosan egy folyamot, és egy ugyanekkora vágást.

10. **Egy G irányítatlan gráfban adott három pont a, b, c. Tudjuk, hogy található G-ben k éldiszjunkt út a és b között és egy ezektől éldiszjunkt út a és c között. Azt is tudjuk, hogy található G-ben (másik) k éldiszjunkt út a és b között és egy ezektől éldiszjunkt út b és c között. Igaz-e, hogy van G-ben $k+1$ éldiszjunkt út a és b között?**

11. **[ZH 2008. október 10.] Tegyük fel, hogy a G gráf k-szorosan élösszefüggő, F a G egy feszítőfája és e az F egy éle. Bizonyítsuk be, hogy a G gráfnak legalább $k-1$ olyan, e-től különböző f éle van, amire igaz, hogy F-ből e-t törölve és f-et behúzva G egy feszítőfáját kapjuk.**
k-éöf-ből következik, hogy tetszőleges két csúcs között legalább k élidegen út megy. Vegyük e két végpontját (i és j), közöttük e-n kívül még legalább $k-1$ éldiszjunkt út megy. Egy ilyen e-től éldiszjunkt utat megnézve biztos van benne olyan f él, ami nincs benne F-ben, hiszen ha nem lenne, akkor kör lenne F-ben. Tehát e és f kicserélhető, ez viszont igaz mind a $k-1$ e-től éldiszjunkt útra.