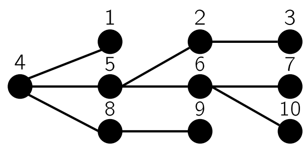
SzA III. gyakorlat

Fázunk, körözünk, utazunk

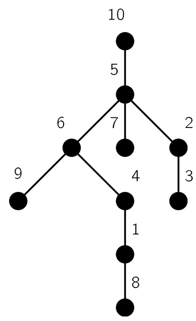
2009. szeptember 23.

1. **Mi a Prüfer-kódja ennek fának?**



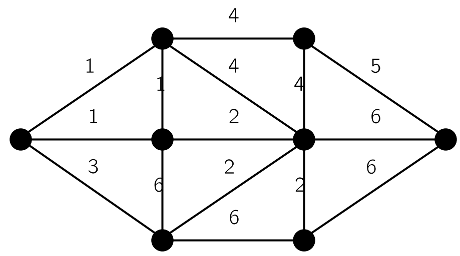
   42568456, a lépéseket nem írom le, benne van a könyvben.

2. **Rajzoljuk le azt a fát, aminek** $2, 5, 5, 1, 4, 6, 6, 5$ **a Prüfer-kódja!**
   A módszer benne van a könyvben, az eredmény:



3. **Hány éle van az** n **pontú egyszerű összefüggő gráfnak, ha pontosan** 3 **különböző feszítőfája van?**
   A gráfban biztosan van kör, különben nem lehetne több feszítőfa. Egy k hosszú körből tetszőleges él kihagyásával különböző feszítőfákat csinálhatunk, így esetünkben legfeljebb egy darab, három hosszú kör lehet. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha egy élet elhagyva már fát kapunk, tehát $n - 1 + 1 = n$ csúcsú a gráf.

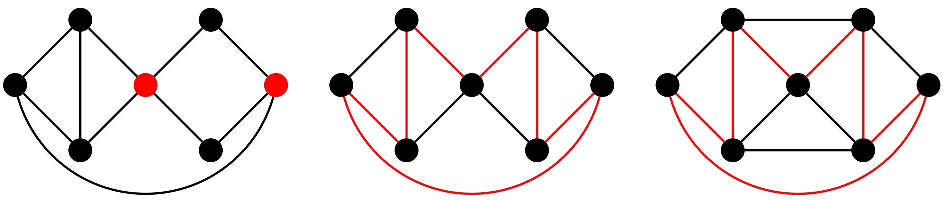
4. **Mennyi az alábbi gráfban a minimális feszítőfa súlya? Hány különböző minimális feszítőfa van?**



   Kruskal algoritmust kell használni, 17 lesz a végeredmény. A három egy súlyú élből kell kettőt választanunk, később pedig a három négy súlyú közül az egyiket nem választhatjuk, így kettő közül kell egyet választani. A választások függetlenek, így $3 \cdot 2 = 6$ minimális összsúlyú feszítőfa van.

5. **[ZH 2006. március 28.] Legyen G egy összefüggő gráf, amiben minden pont foka páros. Igaz-e, hogy ha elhagyjuk G-ből egy körének éleit, akkor a maradékban biztosan van Euler-körséta?**
   Ellenpélda: C_4 (négy hosszú kör). Összefüggő, minden foka páros, de ha elhagyjuk a körét, azaz az összes élét, izolált pontokat kapunk, amiben természetesen nincs E-kör.

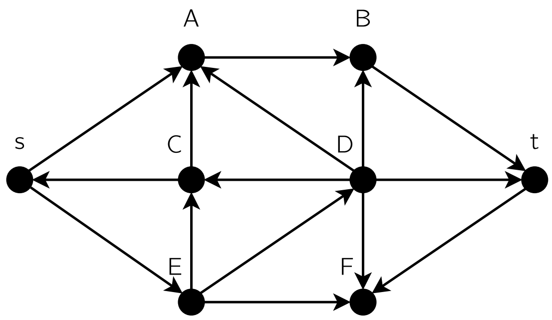
6. **Mutassunk Hamilton-kört a következő gráfokban, vagy lássuk be, hogy nincs!**



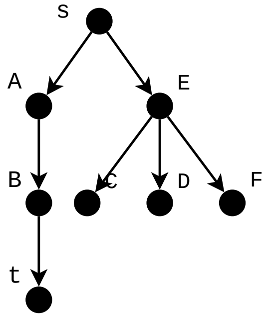
   A bal oldaliban a pirossal színezett két pontot elhagyva három kompononesre esik szét, így biztos nincs benne H-kör, a többiben pirossal egy-egy lehetséges H-kör van jelölve.

7. **Egy 12 fős társaságban mindenki legalább 6 embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait!**
   Definiáljunk egy gráfot, amiben minden embernek egy csúcsot feleltetünk meg, és két csúcs akkor van összekötve, ha ismerik egymást. Ha ebben a gráfban találunk Hamilton-kört, akkor a kör mentén le tudjuk őket ültetni. 12 csúcsunk van és minden fokszám legalább 6, így a Dirac-tétel értelmében van Hamilton-kör a gráfban, tehát létezik ilyen leültetés.

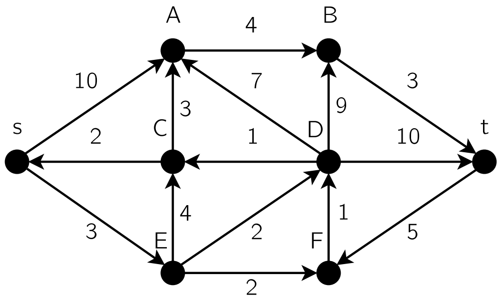
8. **Készítsük el az alábbi gráf szélességi bejárását!**

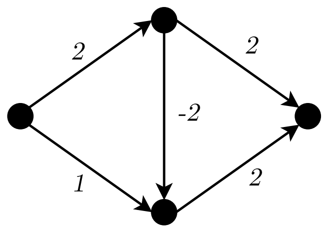


   Egy lehetséges megoldás:



9. **Határozzuk meg a Dijkstra-algoritmussal a legrövidebb utat s és t között, nyomon követve az algoritmust!**





A végeredmény 15.

10. **[ZH 2008. október 10.] Határozzuk meg a fenti jobb oldali gráfban az élsúlyokat úgy, hogy a Dijkstra algoritmus rossz eredményt adjon!**
Attól, hogy rakunk bele negatív élsúlyt, még akár működhetne! Úgy kell negatív élsúlyt belerakni, hogy romoljon el. Az ábrán látható súlyozással az alsó csúcsra az algoritmus 1-et mond, pedig a legrövidebb út oda 0 lenne a bal oldali csúcsból.

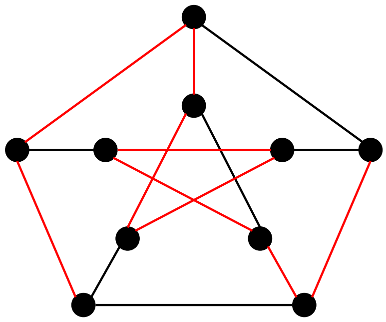
11. **Egy n pontú fa Prüfer-kódjában k különböző szám szerepel. Hány elsőfokú pontja lehet ekkor a fának?**
$n - k$, mert vagy előbb „töröljük le”, mint a szomszédját, ezért nem szerepel a kódban, vagy a legnagyobb sorszámú elsőfokú, és ezért nem szerepel a kódban.

12. **Hány olyan különböző fa adható meg n címkézett ponton, amely nem út?**
Cayley-tétel alapján a különböző fák száma n^{n-2}. Egy út az ténylegesen a csúcsok egy permutációja, ezeket majd le kell vonni, de előbb vegyük észre, hogy egy útnak két permutáció felel meg (oda és vissza). A végeredmény tehát: $n^{n-2} - n!/2$

13. **Egy teljes gráf ponthalmaza $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$. Az (x_i, x_j) élek költsége (súlya) 1, az (y_i, y_j) éleké 2, az (x_i, y_j) éleké 3. Mennyibe kerül a legolcsóbb feszítőfa?**
A Kruskal algoritmus először az 1 súlyú élek közül fog választani, belőlük tud építeni egy $k - 1$ elű fát. Utána a 2 súlyúak következnek, belőlük $l - 1$-et lehet választani. A végén az x_i és y_j pontokon lesz két feszítőfa, ezeket muszáj egy 3 súlyú éllel összekötni. Tehát $(k - 1) \cdot 1 + (l - 1) \cdot 2 + 3 = k + 2l$.

14. **Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden él teljes hosszában egyszínű legyen és minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.**
Ha több komponensből áll, akkor a komponenseket külön, egymástól függetlenül kezelhetjük, így a továbbiakban feltételezzük, hogy a gráf összefüggő. A gráfban van E-kör, mert minden fokszám páros. Vegyünk egy E-kört! A szükséges és elégséges feltétel bizonyítása során látottak alapján vegyük észre, hogy ez az E-kör két E-kör uniója (az élek felét elhagyhatjuk úgy, hogy minden fokszám kettő maradjon, vagyis pont egy E-kör maradjon). Az egyik kör legyen piros, a másik pedig kék. Így az élek elvárásnak megfelelő színezését kapjuk. (Azt nem kell megmondani, hogy hogyan találjuk meg ezt a két kört; csak a létezést kellett bizonyítani!)

15. **Van-e az ábrán látható Petersen-gráfban Hamilton-út? És Hamilton-kör?**



Egy Hamilton-utat pirossal berajzoltam. Hamilton-kör nincsen benne, csak a bizonyítás vázlatát írom le. Először vegyük észre, hogy a gráf „kifordítható", vagyis a külső- és belső kör felcserélésével izomorf gráfokat kapunk, így nem kell külön kezelni sok esetet. Hogy nézne ki egy Hamilton-kör? 10 csúcsunk van és 15 élünk, így 5 él nem szerepel benne. Azt kell kitalálni, melyik ötöt nem vesszük be. Az összes pont foka 3, így mindegyikhez legfeljebb 1 élet lehet elhagyni. A szimmetria miatt megbetűzhetjük a pontokat, úgy érdemes rajzolgatni. Meg kell vizsgálni, azt az esetet, mikor a külső körről hagyunk el 2 élet, valamint azt is, amikor az összekötőkből hármat. Ki fog jönni, hogy sehogy sem lesz körünk.

16. **Egy 20 fős társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré vagy úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait, vagy úgy, hogy senki se ismerje a szomszédait!**
Ha mindenki legalább $n/2$ embert ismer, akkor ez lehetséges ugyanúgy, mint a korábbi feladatban. Ha kevesebb, mint $n/2$-t, akkor vegyük az előbb definiált gráf komplementerét, és az itt talált Hamilton-kör pont egy olyan leültetésnek fog megfelelni, ahol senki nem ismeri a mellette lévőket. A komplementerben már teljesül a Dirac-tétel feltétele, így itt is létezik Hamilton-kör.

17. **Igazoljuk, hogy ha egy $2k+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, akkor a gráfban van Hamilton-út!**
Vegyünk a gráfhoz egy pontot, ahonnan húzzunk éleket az összes eredeti pontba. Az új gráf csúcsainak száma $2k+2$, a fokszámok pedig eggyel növekedtek (az új pont foka $2k+1$), így mindegyik legalább $k+1$. A Dirac-tétel szerint ebben a gráfban van Hamilton-kör, ami biztos átmegy az új csúcson is. Ha ezt a csúcsot az éleivel elhagyjuk, akkor a Hamilton-kör „maradéka" pont egy Hamilton-út lesz az eredeti gráfban.

18. **Létezik-e olyan 6 pontú és 11 illetve 12 élű gráf, melyben nincs Hamilton-kör?**
11 létezik, pl K_5-höz kapcsolva egy éllel egy csúcsot pont ilyet kapunk. 12 él esetén a gráfunk pont 3 éllel tartalmaz kevesebbet mint K_6. Ha tehát K_6-ból úgy hagyun kel 3 élet, hogy nem mind egy ponthoz kapcsolódik, akkor a fokszámok legfeljebb 2-vel csökkennek, vagyis minden pont foka legalább 3 lesz. Ekkor a Dirac-tétel értelmében van Hamilton-kör. Ha az elhagyott 3 él 1 pontra illeszkedett, akkor a fokszámok: $2, 4, 4, 4, 5, 5$. Az Ore-tétel miatt ebben az esetben is van Hamilton-kör.

19. **Egy teljes gráf minden élét irányítsuk meg valamelyik irányban. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott gráfban van irányított Hamilton-út!**
Teljes indukcióval. $n = 1$ csúcs esetén triviálisan igaz. Tfh valamilyen n-re igaz, vizsgáljuk meg $n+1$-re! Az $n+1$ csúcsú teljes gráfból elhagyva egy tetszőleges x pontot egy n csúcsút kapunk, amiben az indukciós feltétel miatt van irányított H-út. Ha x-ből pont ezen H út elejére mutat él, vagy a H-út végéből pont x-be mutat él, akkor x-et a H-út elejére vagy végére téve pont egy jó irányított H-utunk lesz. Baj csak a akkor van, ha az ábrán látható eset áll elő. Ekkor viszont biztos van az úton olyan i csúcs, hogy i-ből x-be mutat él, és x-ből $i+1$-be. Ide beillesztve x-et egy jó H-utat kapunk.