# SzA X. gyakorlat

## Számok

## 2009. november 11.

1. **Az 1 prímszám?**
   Definíció szerint **nem**!

2. **Határozzuk meg az Euklidészi algoritmussal 504 és 372 legnagyobb közös osztóját!**

$$\begin{aligned} 504 &= 1 \cdot 372 + 132 \\ 372 &= 2 \cdot 132 + 108 \\ 132 &= 1 \cdot 108 + 24 \\ 108 &= 4 \cdot 24 + \mathbf{12} \\ 24 &= 2 \cdot 12 + 0, \end{aligned}$$

   tehát 12.

3. **Határozzuk meg 504 és 372 legkisebb közös többszörösét!**
   $lnko(x, y) \cdot lkkt(x, y) = x \cdot y$, ezért $lkkt(504, 372) = 504 \cdot 372/12 = 15624$. Másképp is lehet, a prímfelbontások alapján $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7,\ 372 = 2^2 \cdot 3 \cdot 31$, ezért $lkkt(504, 372) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31 = 15624$.

4. **Hány osztója van 504-nek?**
   A prímfelbontása $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, ezért $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$.

5. $a$ **és** $b$ **páratlan számok,** $c = a^2 + b^2$**. Mennyi** $c$ **és 4 legnagyobb közös osztója?**
   Legyen $a = 2k+1$ és $b = 2l+1$, ekkor $c = (2k+1)^2+(2l+1)^2 = 4(k^2+l^2+k+l)+2$. Ekkor az Euklidészi algoritmussal

$$\begin{aligned} c &= (k^2 + l^2 + k + l) \cdot 4 + \mathbf{2} \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0, \end{aligned}$$

   vagyis 2.

6. **Van-e olyan** $a$ **és** $b$ **szám, hogy** $lnko(a, b) = 3$ **és** $a + b = 100$**?**
   Ebben az esetben 3 osztója mindkét számnak, azaz $a = 3k$ és $b = 3l$, ekkor $a + b = 3(k + l) = 100$, 100 viszont nem osztható hárommal, tehát nincs.

7. **Van-e olyan** $a$ **és** $b$ **szám, hogy** $lnko(a, b) = 5$ **és** $a + b = 100$**?**
   Igen, pl. 55 és 45.

8. **Létezik-e olyan háromjegyű szám, amely osztóinak száma osztható 11-gyel?**
   Mivel 11 prímszám, ennek a keresett számnak a prímfelbontása így néz ki: $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{10} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Ha csak a legkisebb prímszámot, 2-t engedjük meg a prímfelbontásban, akkor is már $2^{10} = 1024$ lenne az első ilyen szám, tehát háromjegyűvel biztos nem megoldható.

9. **Melyek azok a $p$ prímszámok, amelyekre $p+10$ és $p+14$ is prím?**
A 2 nem jó, a 3 jó. Nézzük meg a nagyobbakat! 10 3-mal osztva 1 maradékot, míg 14 pedig 2 maradékot ad. A $p>3$ prímszám biztos nem osztható 3-mal, így 1 vagy 2 maradékot ad vele osztva. Első esetben $p+14$, míg a másodikban $p+10$ lesz osztható 3-mal, vagyis összetett. Tehát az egyetlen megoldás 3.

10. **Egy XX. században született emberről azt tudjuk, hogy épp nagyapja 59. születésnapján született, és kettejük születési évszámai relatív prímek. Mikor született az ember?**
A feladat szövegéből kimaradt egy szó, és a *nem* relatív prímek érdekesek. A XX. század évszámai közül egyetlen osztható 59-cel, ez 1947. Ha az ember ekkor született, akkor a nagyapja 1888-ban, és ezek az évszámok nem relatív prímek. Most belátjuk, hogy bármely más XX. századi évszám esetén a születési évszámok relatív prímek lennének. Tfh $e$ évben született, ekkor $\exists p \neq 59 : p \mid e,\ p \mid e-59$. Ez azt jelenti, hogy $p$ maradék nélkül osztja $e$-t, így a jobb oldal miatt 59-et is maradék nélkül kell osztania. 59 viszont prím, ezért ez biztos nem lehetséges. Tehát 1947-es születés esetén nem relatív prímek, egyébként pedig igen.

11. **Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört semmilyen $n$-re nem egyszerűsíthető!**
Keressük meg *lnko*-t! Euklidészi algoritmussal:

$$\begin{aligned} 21n+4 &= 1\cdot(14n+3)+(7n+1) \\ 14n+3 &= 2\cdot(7n+1)+\mathbf{1} \\ 7n+1 &= 1\cdot(7n+1)+0, \end{aligned}$$

vagyis a számláló és nevező relatív prím.

12. **Bizonyítsuk be, hogy ha az $n>1$ számnak 2005 osztója van, akkor $n$ nem lehet egy egész szám ötödik hatványa!**
Ha $n$ egy egész szám ötödik hatványa, akkor a prímtényezős felírásban a kitevők így néznek ki: $5\alpha_1,\dots,5\alpha_k$, tehát osztóinak száma $(5\alpha_1+1)\dots(5\alpha_k+1)$. 2005 prímtényezős felbontása $5\cdot 401$, viszont az osztók száma nem osztható 5-tel (minden tag $5\alpha_i+1$ alakú).

13. **Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai „kétállásúak": ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárakkal játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a $k$-adik feleség minden $k$-adik ajtó zárján egyet fordít, egészen a századik feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellában laknak a szerencsések?**
Vegyük észre, hogy pontosan akkor lesz nyitva az $i$-edik cella, ha $i$ osztóinak száma páratlan! Ez azért van, mert minden cella zárján az összes „osztója" fordít egyet. Azon számoknak van páratlan osztójuk, amiknek a prímtényezős felbontásában csupa páros hatvány szerepel – ha lenne a kanonikus alakban $p_i^{2\alpha_i+1}$ tag, akkor ez az osztók számának számításakor $2(\alpha_i+1)$ tagot jelentene, vagyis párossá tenné azt. Ha egy szám prímtényezős felírásában minden kitevő páros, akkor négyzetszámról beszélünk. Tehát akkor és csak akkor szabadulhat ki egy

rab, ha négyzetszám a cellájának sorszáma. 1 és 100 közötti négyzetszámok tehát: 1,4,9,16,25,36,49,64,81,100. Ők a szerencsések.

14. **[ZH 2008. november 17.] Igazoljuk, hogy ha $m$ és $n$ pozitív egészek, akkor $d(n)d(m) = d(lnko(n,m))d(lkkt(n,m))$ teljesül, ahol $d(k)$ a $k$ pozitív osztóinak számát, $lnko(n,m)$ és $lkkt(n,m)$ pedig rendre az $n$ és $m$ legnagyobb közös osztóját ill. legkisebb közös többszörösét jelölik.**
Fel fogjuk használni, hogy $\min(a,b)\max(a,b) = ab$, valamint $\min(a,b) + \max(a,b) = a + b$. $n$ és $m$ kanonikus alakjával fogunk dolgozni, $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ és $m = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$.
Bal oldal: $d(n)d(m) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)(\beta_i + 1) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i\beta_i + \alpha_i + \beta_i + 1)$
Jobb oldal: $d(lnko(n,m))d(lkkt(n,m)) = \prod_{i=1}^{k}(\min(\alpha_i,\beta_i) + 1)(\max(\alpha_i,\beta_i) + 1) = \prod_{i=1}^{k}(\min(\alpha_i,\beta_i)\max(\alpha_i,\beta_i) + \min(\alpha_i,\beta_i) + \max(\alpha_i,\beta_i) + 1) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i\beta_i + \alpha_i + \beta_i + 1)$.
Azaz ekvivalens átalakításokkal ugyanarra jutottunk, tehát az állítás igaz.

15. **[PZH 2008. december 5.] Tudjuk, hogy $n$ és $m$ olyan pozitív egészek, amikre $lnko(n,m) = 10$ és $lkkt(n,m) = 1000$, ahol $lnko(n,m)$ és $lkkt(n,m)$ pedig rendre az $n$ és $m$ legnagyobb közös osztóját ill. legkisebb közös többszörösét jelölik. Határozzuk meg az $nm$ szorzatot.**
Tétel: $lnko(n,m)lkkt(n,m) = nm$. Ebből $nm = 10 \cdot 1000 = 10000$.