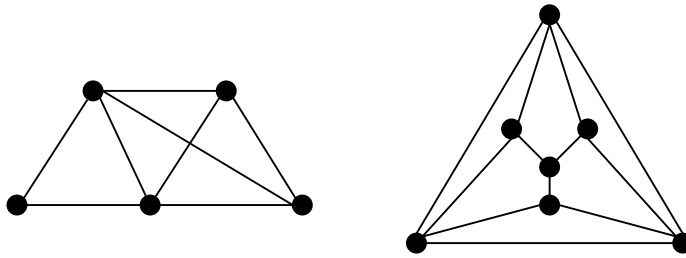


SzA VII. gyakorlat

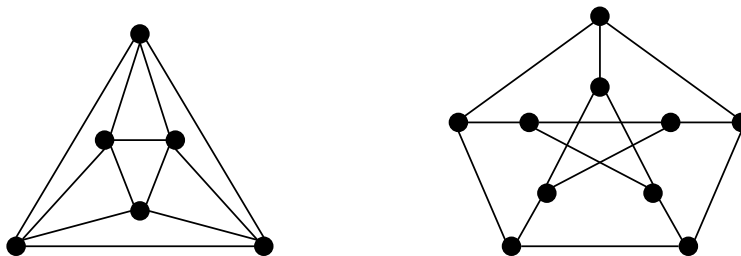
2008. október 20/22.

1. Mennyi a következő gráfok kromatikus száma: C_4 , C_5 , $K_{2,4}$,



2. Egy gráf csúcsai legyenek egy $n * n$ -es sakktábla mezői, ahol $n \geq 2$. Az éleket alkossák az (oldalukkal) szomszédos mezőkből álló párok! Mennyi az így kapott gráf kromatikus száma?
3. G csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos G -ben, ha egymásból bástyával egy lépésben elérhetők. Mennyi G kromatikus száma?
4. Legyen G egy egyszerű gráf, amire $\chi(G) = k$. Tekintsük G -nek egy k színnel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszédságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!
5. Legyen G olyan (irányítatlan) gráf, melynek kromatikus száma k . Bizonyítsuk be, hogy ekkor G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon!
6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges egyszerű G gráfra $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$!
7. Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1+2e/n$!
8. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan $\chi(G)$ színnel való színezése, melyben az egyik színosztály pontosan $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?
9. Adjuk példát minden $k \geq 2$ pozitív egész esetén olyan G_k gráfra, melynek kromatikus száma 2, de megadható a csúcsainak olyan sorrendje, hogy azokat e sorrendben színezve k színt fogunk használni! (G_k -nak tetszőleges számú csúcsa és éle lehet, mi választhatjuk meg.)
10. Legyen G olyan gráf, melynek kromatikus száma k . Legyen $A \subseteq V(G)$ a csúcsok egy olyan részhalmaza, melyben tetszőleges két pont távolsága legalább négy (két pont távolsága a közöttük vezető utak közül a minimális élszámú). Mutassuk meg, hogy az A -beli csúcsok tetszőleges $k + 1$ színnel való színezése kiterjeszhető az egész G gráf $k + 1$ színnel való színezésévé! (Kiterjesztésen azt értjük, hogy a keresett színezésnél az A -beli csúcsok a megadott $(k + 1)$ -színezésük szerinti színt kapják.)
11. Legyen G egy 3-reguláris gráf, amire $\chi_e(G) = 3$. Tudjuk továbbá, hogy G éleinek (a színek egymás közötti permutációjától eltekintve) egyetlen jó három színnel való színezése létezik. Van-e G -ben Hamilton-kör?

12. Mennyi az alábbi gráfok élkromatikus száma?

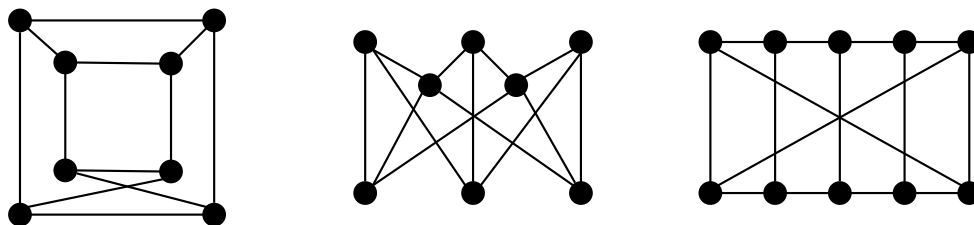


13. Legyen G 100-reguláris gráf 2001 ponton. Határozzuk meg $\chi_e(G)$ értékét!

14. Mycielski-konstrukciót használva rajzoljunk olyan M_k gráfokat, ahol $\omega(M_k) = 2$, $\chi(M_k) = k$, $k = \{2, 3, 4\}$! De tényleg, a szabályt használva, gyakorlás miatt!

15. Jelölje M_k a Mycielski-konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k . Milyen k értékekre tartalmaz M_k Euler-kört?

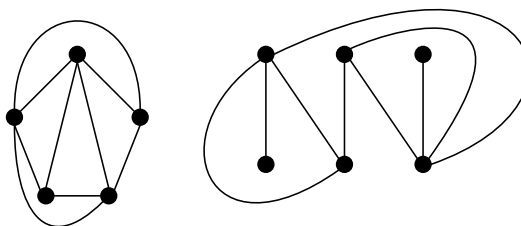
16. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



17. Mutassuk meg, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6!

18. Hány csúcsa van egy összefüggő, 4-reguláris síkgráfnak, ha síkbarajzolásakor 10 tartomány keletkezik?

19. Készítsük el az alábbi gráfok duálisát!



20. Legyen G egy 20 pontú, összefüggő, 3-reguláris síkgráf. Hány pontja van G duálisának, G^* -nak?

21. Mutassunk egy olyan egyszerű G gráfot, melynek 5 pontja van, és izomorf a duálisával!

22. Egy nemzetközi konferencián 5 ország egy-egy képviselője ül asztalhoz. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos!

23. Legyen G egy egyszerű síkgráf, melynek n pontja, e éle és c darab összefüggő komponense van. A síkbarajzolása során t darab tartomány keletkezik. Bizonyítsuk be, hogy $n - e + t = c + 1$.