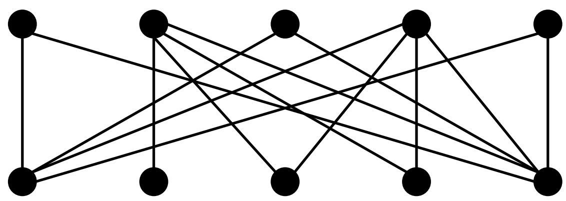
SzA VI. gyakorlat

2008. október 15/16.

1. **Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban!**



Teljes párosítás nem lehet a gráfban, hiszen az alsó csúcsok közül a középső háromnak összesen két szomszédja van, tehát sérül a Hall-feltétel. Eggyel kisebb, 4 méretű párosítást tudunk mutatni (pl. a „függőleges” élek), így ezek maximális párosítást alkotnak.

2. **Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!**
Válasszunk ki t fiút! Ha $t \leq 6$, akkor már egyiküknek is legalább 6 lányismerőse van. Ha $t \geq 7$, akkor tfh összesen kevesebb, mint t lányt ismernek. Ekkor egy olyan lány fiúismerőseinek száma, akit egyikőjük sem ismer: $12 - t \leq 5$, ami ellentmond a feltételnek. Ezek alapján tetszőleges t fiúnak összesen legalább t lányismerőse van, tehát tudunk adni egy teljes párosítást (Frobenius-tétel).

3. **A $G = (A, B, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és az A osztály minden valódi X részhalmazára (azaz $\emptyset \subset X \subset A$) teljesül, hogy $|N(X)| > |X|$. Igazoljuk, hogy G tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítássá!**
Hagyjuk el a kiválasztott élet a hozzátartozó csúcsokkal együtt! Az így keletkező gráfban minden szomszédság legfeljebb egy elemmel csökken, így $|N'(X)| \geq |N(X)| - 1 \geq |X|$ tetszőleges $X \subseteq A$-ra, kihasználva, hogy $|N(X)| > |X|$. A módosított gráfban a Frobenius-tétel szerint tehát van teljes párosítás, ehhez pedig hozzávehetjük az eredetileg választott élet, amivel már az eredeti gráfban is teljes párosításunk lesz.

4. **Legyen $G = (A, B, E)$ egy egyszerű páros gráf, melyben minden A-beli pont fokszáma azonos (d_A), és minden B-beli pont fokszáma is azonos (d_B). Tegyük fel, hogy $d_A, d_B > 0$. Mutassuk meg, hogy G-ben akkor és csak akkor létezik A-t lefedő párosítás, ha $|A| \leq |B|$!**
Egyik irány: ha van A-t lefedő teljes párosítás, akkor mindegyik A-beli csúcsnak kell pár B-ben, így $|A| \leq |B|$. Másik irány: tudjuk, hogy $|A| \leq |B|$. Az élek számát felírhatjuk kétféleképpen is: $|A|d_A = |B|d_B$, ebből következik, hogy $d_A \geq d_B$. Vegyünk egy tetszőleges $X \subseteq A$ halmazt. Belőle csak $N(X)$-be futnak élek, míg $N(X)$-ből legalább annyi élnek kell futnia, mint amennyi X-ből belefut: $|N(X)|d_B \geq |X|d_A$, amiből következik, hogy $|N(X)| \geq |X|$, vagyis létezik A-t lefedő párosítás a Hall-tétel miatt.

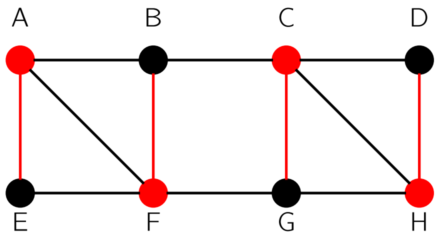
5. **Egy szigeten n család lakik. A Sziget Vadászati Elöljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet n egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet, n mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdasági- és egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen**

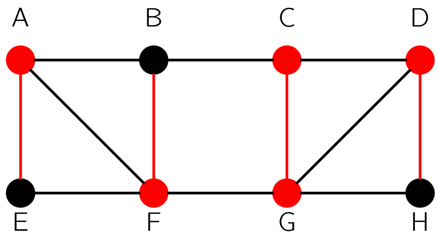
közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?
Definiáljunk egy páros $G(V, M, E)$ gráfot úgy, hogy egyik csúcsosztályba tartoznak a vadászterületek, másikba a mezőgazdasági területek, egy vadász- és mezőgazdasági terület pedig pontosan akkor van összekötve, ha a kettőnek van közös része. Könnyen látszik, hogy pontosan akkor létezik megfelelő területkiosztás, ha G-ben létezik teljes párosítás. Vegyünk egy tetszőleges $X \subseteq V$ halmazt! Az ezekhez a csúcsokhoz tartozó összterület $|X|T/n$, ha T a sziget területe. Tfh kevesebb, mint $|X|$ mezőgazdasági területtel van közös területe X-nek. Ez azt jelenti, hogy $|X|T/n$ területet kellene lefedni kevesebb, mint $|X|$ darab T/n méretű területtel, ami nyilvánvalóan lehetetlen. Ezek alapján teljesül a Hall-feltétel, valamint $|V| = |M|$, tehát létezik teljes párosítás.

6. **Hány különböző teljes párosítása lehet egy n csúcsú fának?**
Ha n páratlan, akkor 0. Ha $n = 2$, akkor 1. Sejtésünk az, hogy tetszőleges n-re legfeljebb 1. Elég csak páros n-eket vizsgálni. Mint láttuk, $n = 2$-re ez igaz, tfh tetszőleges $n-2$-re is igaz (teljes indukció). Szeretnénk belátni, hogy n-re is jó. Mivel fáról beszélünk, biztos van benne elsőfokú csúcs, legyen ez x, és az a csúcs, aki a szomszédja, y. Hagyjuk el x-et és y-t! A maradék gráf is egy fa, $n-2$ csúccsal, amiben az indukciós feltevés miatt legfeljebb 1 teljes párosítás van. Ha x-et és y-t hozzávesszük, akkor az új gráfban ha van teljes párosítás, akkor (x, y) élt kötelező bevenni, nincs választási lehetőségünk, tehát egynél több párosításunk most sem lehet.

7. **G páros gráf. Igaz-e, hogy ha G-ben van Hamilton-kör, akkor van benne teljes párosítás? Igaz-e az állítás megfordítása?**
Igaz, mert egy páros gráfban minden kör páros hosszú, így egy Hamilton kör is, aminek minden második éle pont egy teljes párosítást ad. Megfordítva nem igaz, pl. egy $2k$ csúcsú páros gráfban, ahol minden pont foka 1, van teljes párosítás, de Hamilton-kör biztos nincs.

8. **Adjunk meg maximális független élhalmazt és minimális lefogó ponthalmazt az ábrán látható gráfokban!**





$\{(A, E), (B, F), (C, G), (D, H)\}$ mindkét gráfban teljes párosítás, így maximális független élhalmaz is. A bal oldalon $\{A, C, F, H\}$ egy lefogó ponthalmaz, és minimális is, mivel $\tau \geq \nu$, és itt az egyenlőség teljesül. A jobb oldalon $\{A, E, F\}$ és $\{D, G, H\}$ közül egyenként legalább 2, összesen tehát legalább 4 csúcsot ki kell választani, és ekkor még biztos, hogy ki fog maradni él (B, C), így $\tau \geq 5$. $\{A, C, D, F, G\}$ viszont pont jó is.

9. **Igazoljuk, hogy az n pontú G páros gráfban $\alpha(G) \geq n/2$!**
Egy páros gráfban a két pontosztály közül az egyik csúcsszáma mindig $\geq n/2$. Az egy osztályba tartozó csúcsok között biztos nem megy él, ezért egy osztály összes csúcsa független, és ha a nagyobb csúcsszámú osztályt vesszük, pont az állítást kapjuk.

10. **Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a $G = K_{n,m}$ teljes páros gráfra!**
A teljes páros gráfban a kisebbik csúcsszámú osztályt lefedő párosítás biztos létezik,

ennél nagyobb nem is lehet, így $\nu(G) = \min\{n, m\}$. König tétele értelmében $\nu(G) = \tau(G)$, ezért $\tau(G) = \min\{n, m\}$. Gallai tétele miatt $\alpha(G) = |V| - \tau(G) = (n+m) - \min\{n, m\} = \max\{n, m\}$. Ismét König tétele alapján $\rho(G) = \alpha(G) = \max\{n, m\}$.

11. **A $V = \{2, 3, \ldots, 2007\}$ ponthalmazon definiáljuk a $G(V, E)$ gráfot úgy, hogy $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \nmid y \wedge y \nmid x$! ($a \nmid b$: a nem osztója b-nek.) Van-e G-ben teljes párosítás?**
Igen, van. A szomszédos számok relatív prímek, így fut közöttük él. A $(2, 3), (4, 5) \ldots (2006, 2007)$ pont egy teljes párosítás lesz.

12. **Egy G összefüggő gráf olyan, hogy tetszőleges pontját elhagyva a maradék gráfban létezik teljes párosítás. Bizonyítsuk be, hogy G-ben nincs elvágó él! (Egy él elvágó, hogyha az élet elhagyva megszűnik a gráf összefüggősége.)**
Tfh van egy ilyen tulajdonságú gráfunk, mégis van benne elvágó él. A gráf csúcsainak száma páratlan, mert egy pontot elhagyva egy olyan gráfot kapunk, amiben van teljes párosítás, így páros sok csúcsa van. Nézzünk most egy elvágó élet! Ez az él nyilván két komponensre osztja a gráfot, az egyiknek páros, a másiknak páratlan sok csúcsa van. Hagyjuk most el ennek az élnek azt a csúcsát, amelyik a páros csúcsszámú komponenshez tartozik! A gráf így két összefüggő komponensre esik szét, mindkettőnek páratlan sok csúcsa van. Ebben kellene léteznie teljes párosításnak, de ez lehetetlen, mert ehhez a két komponens között is futnia kellene élnek.

13. **Tegyük fel, hogy a G gráf minden összefüggő komponense egy kör. Mi az a legkisebb m szám, amire teljesül, hogy G-hez hozzá lehet venni m (megfelelően választott) élet úgy, hogy az új gráfban legyen teljes párosítás? Mikor létezik ilyen m szám?**
A páros körök nem számítanak, bennük biztos, hogy van teljes párosítás. Ha páratlan darab páratlan kör van a gráfban, akkor összesen páratlan sok csúcs van, így nincs ilyen m szám. Ha páros sok páratlan kör van, akkor mindegyikben csináljunk egy maximális párosítást, így mindegyikben pont egy csúcs fog párosítatlanul maradni. Számozzuk meg ezeket a kimaradt csúcsokat $1 \ldots p$-ig (p legyen a páratlan körök száma), és vegyünk fel éleket így: $(1, 2), (3, 4) \ldots (p-1, p)$. Így már lesz teljes párosítás, felesleges élet nem vettünk fel, és $m = p/2$.

14. **A 2000 csúcsú G gráfban $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!**
Tudjuk, hogy $\tau(G) \geq \nu(G)$, és egy teljes párosítás esetén $\nu(G) = n/2$. Ebből $678 = \tau(G) \geq \nu(G) = 1000$ ellentmondás, tehát nem lehet a gráfban teljes párosítás.

15. **Mutassuk meg, hogy ha az n pontú G gráfban nincs hurokél és $\tau(G) = n - 1$, akkor $G = K_n$!**
Tfh mégsem teljes gráf, vagyis $\exists u, v : (u, v) \notin E$. Ha minden csúcsot beválasztunk u-n és v-n kívül a lefogó pontok közé, akkor több csúcsra már nincs is szükségünk, hiszen az u-ba és v-be futó összes él is le van fogva a másik végpontja által (és természetesen a gráf összes többi éle is). Így kiderült, hogy $\tau(G) \leq n - 2$, ami ellentmond a feltételnek.

16. **A G gráfnak $2n$ pontja van és tudjuk, hogy minden pont foka legalább n. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\rho(G)$ értékét!**
A Dirac-tétel miatt a gráfban van Hamilton-kör, és mivel páros csúcsa van a gráfnak, a Hamilton-kör minden második élét kiválasztva egy teljes párosítást kapunk, vagyis $\nu(G) = 2n/2 = n$. Gallai tétele szerint pedig $\rho(G) = |V| - \nu(G) = 2n - n = n$.

17. **Legyen egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \geq n$!**
Tudjuk, hogy a fentiek miatt $\nu(G) = n$, viszont azt is tudjuk, hogy $\tau(G) \geq \nu(G) = n$.

18. **Egy gráfból válasszunk független éleket a következő mohó algoritmussal: sorban vesszük G éleit, és ha a következő él független a már kiválasztottaktól, akkor azt is belevesszük a független élek közé. Bizonyítsuk be, hogy így legalább $\nu(G)/2$ független élt találunk!**
Legyen M egy maximális párosítás, és M_m egy olyan párosítás, amit az algoritmusunk talált. Tudjuk, hogy $|M| = \nu(G)$. Ha lenne olyan él M-ben, aminek egyik végpontjához tartozó él sem szerepel M_m-ben, akkor ezt biztos bevette volna a mohó algoritmus. Így M élei közül mindegyiknek legalább egy csúcsa szerepel M_m-ben is, tehát $M_m \geq \nu(G)/2$.

19. **Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$! $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszáma.**
Egy v csúcs pontosan $d(v)$ élet tud lefogni, és ha T egy minimális lefogó csúcshalmaz, akkor
$$\sum_{v \in T} d(v) \geq |E|,$$
hiszen T csúcsai az összes élet lefogják (lehet, hogy egy élet több csúcs is). Ha a bal oldalon a fokszámokat helyettesítjük a maximális fokszámmal, akkor a kifejezés értéke biztos nem csökken, tehát
$$\sum_{v \in T} \Delta(G) \geq \sum_{v \in T} d(v) \geq |E|,$$
viszont itt pontosan $|T| = \tau(G)$-szer adtuk össze $\Delta(G)$-t, vagyis $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$.

20. **Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög- és hurokmentes G gráfban $\alpha(G)\tau(G) \geq |E|$!**
Mivel G-ben nincs háromszög, egy tetszőleges csúcs szomszédai egy független halmazt alkotnak. Így az összes fokszám legfeljebb $\alpha(G)$ lehet, azaz $\alpha(G) \geq \Delta(G)$ miatt $\alpha(G)\tau(G) \geq \Delta(G)\tau(G) \geq |E|$ az előző feladat eredményét felhasználva.