SzA VI. gyakorlat

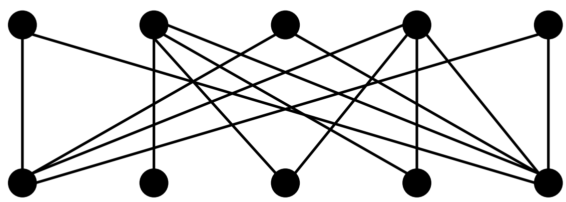
2008. október 15/16.

Hasznos tudnivalók

- Frobenius-tétel: Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban acsa van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és $\forall X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$.
- Hall-tétel: Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban acsa van az A pontosztályt lefedő párosítás, ha $\forall X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$.
- Tutte: $G(V, E)$ gráfban $\exists$ teljes párosítás $\Leftrightarrow$ G-ből elhagyva tetszőleges $S \subseteq V$ pontokat a keletkező gráf páratlan csúcsú komponenseinek száma nem nagyobb $|S|$-nél.
- $\alpha(G)$: független csúcsok maximális száma G-ben
- $\nu(G)$: független élek maximális száma G-ben (maximális párosítás)
- $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma G-ben
- $\tau(G)$: lefogó csúcsok minimális száma G-ben
- $\alpha(G) \leq \rho(G)$, $\nu(G) \leq \tau(G)$
- Gallai: $\alpha(G) + \tau(G) = n$, $\nu(G) + \rho(G) = n$
- König: páros gráfokra! $\nu(G) = \tau(G)$; $\alpha(G) = \rho(G)$, ha nincs izolált pont

Feladatok

1. Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban!



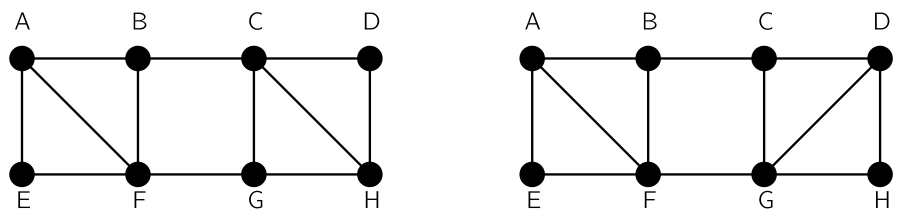
2. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!
3. A $G = (A, B, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és az A osztály minden valódi X részhalmazára (azaz $\emptyset \subset X \subset A$) teljesül, hogy $|N(X)| > |X|$. Igazoljuk, hogy G tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítássá!
4. Legyen $G = (A, B, E)$ egy egyszerű páros gráf, melyben minden A-beli pont fokszáma azonos (d_A), és minden B-beli pont fokszáma is azonos (d_B). Tegyük fel, hogy $d_A, d_B > 0$. Mutassuk meg, hogy G-ben akkor és csak akkor létezik A-t lefedő párosítás, ha $|A| \leq |B|$!

5. Egy szigeten n család lakik. A Sziget Vadászati Elöljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet n egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet, n mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdasági- és egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?

6. Hány különböző teljes párosítása lehet egy n csúcsú fának?

7. G páros gráf. Igaz-e, hogy ha G-ben van Hamilton-kör, akkor van benne teljes párosítás? Igaz-e az állítás megfordítása?

8. Adjunk meg maximális független élhalmazt és minimális lefogó ponthalmazt az ábrán látható gráfokban!



9. Igazoljuk, hogy az n pontú G páros gráfban $\alpha(G) \geq n/2$!

10. Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a $G = K_{n,m}$ teljes páros gráfra!

11. A $V = \{2, 3, \ldots, 2007\}$ ponthalmazon definiáljuk a $G(V, E)$ gráfot úgy, hogy $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \nmid y \wedge y \nmid x$! ($a \nmid b$: a nem osztója b-nek.) Van-e G-ben teljes párosítás?

12. Egy G összefüggő gráf olyan, hogy tetszőleges pontját elhagyva a maradék gráfban létezik teljes párosítás. Bizonyítsuk be, hogy G-ben nincs elvágó él! (Egy él elvágó, hogyha az élet elhagyva megszűnik a gráf összefüggősége.)

13. Tegyük fel, hogy a G gráf minden összefüggő komponense egy kör. Mi az a legkisebb m szám, amire teljesül, hogy G-hez hozzá lehet venni m (megfelelően választott) élet úgy, hogy az új gráfban legyen teljes párosítás? Mikor létezik ilyen m szám?

14. A 2000 csúcsú G gráfban $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!

15. Mutassuk meg, hogy ha az n pontú G gráfban nincs hurokél és $\tau(G) = n - 1$, akkor $G = K_n$!

16. A G gráfnak $2n$ pontja van és tudjuk, hogy minden pont foka legalább n. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\rho(G)$ értékét!

17. Legyen egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \geq n$!

18. Egy gráfból válasszunk független éleket a következő mohó algoritmussal: sorban vesszük G éleit, és ha a következő él független a már kiválasztottaktól, akkor azt is belevesszük a független élek közé. Bizonyítsuk be, hogy így legalább $\nu(G)/2$ független élt találunk!

19. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$! $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszáma.

20. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög- és hurokmentes G gráfban $\alpha(G)\tau(G) \geq |E|$!