

SzA XIII. gyakorlat

2008. december 3/4.

Hasznos tudnivalók

- Lagrange: ha $H \leq G$, akkor $|H| \mid |G|$, ahol G egy csoport.
- Elem rendje osztja a csoport rendjét.
- $\langle G, \{+, \cdot\} \rangle$ gyűrű, ha $(G, +)$ Abel-csoport, (G, \cdot) félcsoport, valamint teljesülnek a disztributív tulajdonságok: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ és $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ($\forall a, b, c \in G$). Jelölések: $e_+ = 0$, $e_\cdot = 1$ (ha létezik), $g_+^{-1} = -g$.
- $\langle G, \{+, \cdot\} \rangle$ ferdetest, ha gyűrű, és $(G \setminus \{0\}, \cdot)$ csoport.
- $\langle G, \{+, \cdot\} \rangle$ test, ha ferdetest, és \cdot kommutatív.

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges csoportban $o(gh) = o(hg)$ tetszőleges g -re és h -ra! ($o(x)$ az x elem rendje.)
2. Tudjuk, hogy a G csoport rendje 100, a g elemre pedig teljesül, hogy $g^{21} = e$. Mit tudunk g -ről?
3. Hány hatodrendű elem van C_{24} -ben, azaz a 24-ed rendű ciklikus csoportban?
4. Hány részcsoportha van a 12-ed rendű ciklikus csoportnak (C_{12})?
5. Mik az egyes elemek rendjei a C_{12} -ben?
6. Hány olyan eleme van a C_{12} ciklikus csoportnak, ami egymaga generálja az egész csoportot?
7. Hány olyan eleme van a C_n ciklikus csoportnak, ami egymaga generálja az egész csoportot?
8. Mik a végtelen ciklikus csoport részcsoporthai, illetve az elemek rendjei?
9. Melyik alkot gyűrűt, és melyik alkot testet?
 - (a) $\langle \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}, \{+, \cdot\} \rangle$
 - (b) $\langle \{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}, \{+, \cdot\} \rangle$
 - (c) $\langle \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, 2 \nmid b, 5 \nmid b\}, \{+, \cdot\} \rangle$
 - (d) $\langle \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}, \{+, \circ\} \rangle$ – valós függvények összeadásra és kompozícióra
10. R egy nullosztómentes gyűrű. Bizonyítsuk be, hogy
 - (a) ha $a^2 = a$ valamilyen $a \in R$ -re, akkor $a \in \{0, 1\}$,
 - (b) ha $a^k = 0$ valamilyen $a \in R$ -re, akkor $a = 0$!