SzA XII. gyakorlat

2008. november 26/27.

Hasznos tudnivalók

- $(G, *)$ félcsoport, ha $*$ G-n zárt és asszociatív.
- $(G, *)$ csoport, ha félcsoport, $\exists$ e egységelem és $\forall g \in G$ $\exists$ g^{-1} inverz.
- $(G, *)$ Abel-csoport, ha csoport és $*$ kommutatív.
- Csoport rendje: $|G|$.
- g elem rendje i, ha $g^i = e$ és $g^j \neq e, 1 \leq j < i$.
- g elem által generált (ciklikus) csoport: $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, g^3, \cdots\}$
- H részcsoportja G csoportnak ($H \leq G$), ha $H \subseteq G$ és H csoport G műveletére.
- Minden prímrendű csoport ciklikus.

Feladatok

1. A $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ halmazon az alábbi táblázatokban látható műveleteket értelmezzük.

$+$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$
$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$

$*$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$
$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$
$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$

   (a) $((\spadesuit * \diamondsuit) + \clubsuit) * (\spadesuit + \diamondsuit) = ?$

   (b) Ezek a műveletek asszociatívak? Kommutatívak? Van egységelemük?

   (c) Oldjuk meg a következő egyenletet: $(\heartsuit * x) + \diamondsuit = \diamondsuit$!

   (d) Mit alkotnak ezek a műveletek az adott halmazzal?
   (semmit/félcsoportot/csoportot/Abel-csoportot)

2. Csoportot alkotnak-e az alábbi H halmazok a megadott műveletekre?

   (a) H egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza, a művelet a halmazok szimmetrikus differenciája. Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája alatt az $A \triangle B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ halmazt értjük.

   (b) $H = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza, a művelet pedig a hagyományos szorzás.

   (c) $H = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza, a művelet pedig a hatványozás.

   (d) $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ahol $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza, a művelet pedig a következő: $a * b = 2ab$, ahol a jobboldalon a hagyományos szorzás szerepel.

   (e) $H = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$, a művelet pedig az összeadás.

   (f) $H = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$, a művelet pedig az összeadás.

   (g) $H = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$, a művelet pedig a szorzás.

   (h) $H = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$, a művelet pedig a szorzás.

(i) H a $\pmod m$ szerint vett teljes maradékrendszer ($H = \{0, 1, \dots m-1\}$), a művelet pedig a maradékosztályokon értelmezett összeadás.

3. Legyen G olyan csoport, ahol $a^2 = e$ teljesül minden $a \in G$ elemre. Bizonyítsuk be, hogy G Abel-csoport!

4. Egy G csoportban minden $a, b \in G$ elempárra teljesül, hogy $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G Abel-csoport!

5. Egy leképezés minden elemhez az inverzét rendeli. Mikor lesz homomorfizmus ez a leképezés?

6. Tekintsünk egy páratlan rendű Abel-csoportot, ahol a művelet neve az összeadás. Bizonyítsuk be, hogy az összes elem összege 0, azaz az egység! (Vagyis a csoport összes elemét összeadjuk.)

7. Legyen $(G_1, *) \leq (G, *)$ és $(G_2, *) \leq (G, *)$ a $(G, *)$ csoport két részcsoportja! Részcsoportok-e: $(G_1 \cap G_2, *)$, $(G_1 \cup G_2, *)$?

8. A valós számsorozatok halmaza csoportot alkot a számsorozatok összeadására nézve, mint műveletre. Az alábbi részhalmazok közül melyek alkotnak részcsoportot ebben a csoportban?

   (a) a konvergens számsorozatok halmaza,

   (b) a divergens számsorozatok halmaza,

   (c) a korlátos számsorozatok halmaza,

   (d) a monoton növő számsorozatok halmaza.

9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges csoportban $o(gh) = o(hg)$ tetszőleges g-re és h-ra! ($o(x)$ az x elem rendje.)