SzA I. gyakorlat

2008. szeptember 10/11.

1. Igaz-e a következő állítás: Minden olyan borgnak, aki ebben a szobában van, piros fülei vannak.

2. Mi az alábbi állítások tagadása? (Két állítás akkor tagadása egymásnak, ha közülük minden esetben egy és csak egy igaz)

   (a) Az osztályban minden tanuló lány.

   (b) Bergengóciában minden férfi gazdag vagy nincs felesége (vagy mindkettő).

   (c) Az osztályban van olyan lány, aki magasabb, mint 170cm.

   (d) Bergengóciában van olyan nő, aki gazdag és nincs gyereke.

3. Fogalmazzuk meg az alábbi állítás tagadását úgy, hogy ne szerepeljen benne tagadószó!
   „Minden asszony életében van olyan pillanat, hogy szeretne olyat tenni, ami nem szabad."

4. Van két állítás, p és q. Tudjuk, hogy ha p igaz, akkor q is igaz. Következik-e ebből, hogy ha q nem igaz, akkor p sem igaz?

5. Tudjuk, hogy minden hömpörő surjancs. Mondjuk meg minden alábbi állításra, hogy biztosan igaz, lehetséges, vagy biztosan hamis!

   (a) Tudjuk valamiről, hogy nem hömpörő. Azt állítom, hogy ez surjancs.

   (b) Tudjuk valamiről, hogy hömpörő. Azt állítom, hogy ez nem surjancs.

   (c) Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez hömpörő.

   (d) Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.

   (e) Tudjuk valamiről, hogy surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.

6. Egy érettségi találkozón kiderül, hogy mindenkinek vannak gyerekei. Hogyan tudnánk megcáfolni az alábbi állításokat? Mondjuk meg, hogy milyen bizonyítékot kéne mutatni annak igazolására, hogy ezek az állítások nem igazak (lehetőleg ne használjuk a legfiatalabb, legidősebb szavakat)!

   (a) Mindenkinek a legidősebb gyereke 10 évnél idősebb.

   (b) Mindenkinek a legfiatalabb gyereke 10 évnél idősebb.

   (c) Valakinek a legfiatalabb gyereke 10 évnél fiatalabb.

7. Hányféleképpen ültethető le egy köralakú asztal köré 6 ember? Az elforgatással egymásba vihető leültetéseket nem tekintjük különbözőknek.

8. Egy 6 házaspárból álló társaság hányféleképpen ültethető le egy padra, ha a házastársak egymás mellé ülnek? És egy köralakú asztalhoz?

9. Hányféleképpen ültethetünk le n házaspárt egy padra, ha a házastársak egymás mellé ülnek?

10. Hányféleképpen állhat fel 10 fiú és 5 lány egy sorba úgy, hogy két lány ne álljon egymás mellett?
11. Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \ldots n$ számoknak, amelyekben a páros és páratlan számok felváltva követik egymást?
12. Egy dobozban 51 piros, 62 zöld és 30 sárga golyó van. Hányat kell (csukott szemmel) kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük
    (a) legalább két különböző?
    (b) legalább három piros?
    (c) legalább két azonos?
13. Egy 12 fős társaságot egy szálloda két háromágyas és három kétágyas szobájában kell elszállásolni. Hány különböző szobabeosztás lehetséges, ha az azonos számú ágyat tartalmazó szobákat nem különböztetjük meg egymástól?
14. Hányféleképpen lehet az ötös lottón (90 számból ötöt húznak ki) ötös, négyes, illetve hármas találatom? (Feltételezhetjük, hogy a lottószámokat már kihúzták.)
15. Hányféleképpen választhatunk ki a $\{-10, -9, -8, \ldots 10\}$ számok közül 4 különbözőt a sorrendre való tekintet nélkül úgy, hogy a szorzatuk pozitív legyen?
16. Hány olyan tízjegyű szám van, melyben a második számjegy 5-ös?
17. Hány olyan tízjegyű szám van, melyben szerepel az 5-ös számjegy?
18. Hány olyan 10 hosszú 0-1 sorozat van, melyben legalább 8 darab egyes van?
19. Hány olyan négyjegyű szám van, melyben a jegyek szigorúan monoton növekvő sorrendben követik egymást?
20. Hányféleképpen helyezhető el 20 különböző zászló 10 számozott zászlórúdra úgy, hogy egy rúdon tetszőlegesen sok zászló lehet (0 és 20 között), és az egyes rudakon a zászlók sorrendje nem számít?
21. Egy cirkuszban az állatidomár összesen 7 nagymacskát szeretne a porondra küldeni. A cirkusznak tigrisei, oroszlánjai és párducai vannak, mindből legalább 7 darab. Ha nem tudjuk megkülönböztetni az azonos fajú állatokat, akkor hányféle bevonulási sorrend közül választhat az idomár? És ha a sorrend nem számít?
22. Hányféleképpen húzhatunk a 32 lapos magyar kártyapakliból 4 lapot úgy, hogy legyen benne
    (a) piros vagy ász?
    (b) piros és ász?
23. Bizonyítsuk be, hogy
    (a) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
    (b) $n\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1} + k\binom{n}{k}$