SzA IX. gyakorlat

2007. november 21.

1. **Van 3 algoritmusunk, amelyek n méretű input esetén rendre n^2, n^6 és 2^n lépés alatt végeznek a feladattal. Tegyük fel, hogy egy óra alatt tudunk mindegyikkel megoldani egy n méretű feladatot a számítógépünkön. Ha veszünk egy 100-szor olyan gyors gépet, melyik algoritmussal mekkora feladatot tudunk megoldani ugyanúgy 1 óra alatt?**
   Az elsőnél $100n^2 = n_1^2$, amiből $n_1 = 10n$. A másodiknál $100n^6 = n_2^6$, amiből $n_2 = \sqrt[6]{100}n \approx 2.15n$. A harmadiknál $100 \cdot 2^n = 2^{n_3}$, amiből logaritmus azonosságokkal $n_3 = n + \log_2 100 \approx n + 6.64$.

2. **Gondolkozzunk el az NP-beliség, P-beliség és NP-teljesség fogalmakon!**
   De tényleg!

3. **Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinomidőben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! (Vagyis input: G és k; output: igen/nem). Hogy tudnánk ennek segítségével polinomidőben meghatározni $\chi(G)$-t?**
   Tudjuk, hogy $1 \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Legyen az algoritmusunk a, és $a(G, k)$ formában tudjuk meghívni. Ekkor megkérdezzük, hogy $a(G, \lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \rceil)$? Ha igen, akkor már tudjuk, hogy $1 \leq \chi(G) \leq \lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \rceil$, egyébként pedig $\lceil \frac{\Delta(G)+1}{2} \rceil < \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Így megfeleztük a lehetséges értékek számát. Magyarul bináris kereséssel megkereshetjük a megfelelő értéket, ami $\log_2(\Delta(G) + 1)$ lépésből ki is fog derülni.

4. **Mutassuk meg, hogy az alábbi probléma NP-beli!**

   - **Bemenet: egy G gráf és egy k szám.**
   - **Kérdés: Kiszínezhető-e G k színnel?**

   Egy tanú maga egy jó színezés. Ha n csúcsunk van, akkor minden csúcshoz meg kell adni a színét, tehát nagyvonalúan is $2n$ méretű a tanú, ami az input méretében (n^2 vagy $n + e$) mindenképpen polinomiális. Az ellenőrzés szintén megy polinomidőben, hiszen ha minden csúcsnak megvizsgáljuk az összes szomszédját, hogy nincs-e színütközés, az is csak n^2 lépés, ami szintén polinomiális az input méretében.

5. **Vezessük vissza a Hamilton-kör létezésére vonatkozó problémát az adott két pont között Hamilton-út létezésére vonatkozó problémára (irányítatlan gráfok körében)!**
   Ha egy él két végpontja között vezet Hamilton-út, akkor a gráfban van Hamilton-kör is az út és az él felhasználásával. Vizsgáljuk meg az összes él két csúcspontjára, hogy van e közöttük Hamilton-út! Ez legrosszabb esetben is $\binom{n}{2}$ hívás, ami polinomiális az input méretében. Ha egy élre is akár igen választ kapunk, akkor van Hamilton-kör.

6. **Mi az alábbi problémák bonyolultsága, ha az input egy $G(V, E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$)? Természetesem bizonyítsuk is be!**

(a) **Kiszínezhetőek-e G pontjai 2 színnel úgy, hogy legfeljebb 2 él kivételével minden él végpontjai különböző színűek?**
Ez P-beli, az élek közül hagyjunk el kettőt az összes lehetséges módon ($\binom{e}{2}$, polinomiális), utána vizsgáljuk meg, hogy a gráf színezhető-e két színnel! Ez elég gyors, hiszen a mohó algoritmus erre tökéletes. Ha két él elhagyásával kiszínezhető két színnel G, akkor az éleket visszatéve legfeljebb az ő végpontjaik lesznek azonos színűek.

(b) **Kiszínezhető-e G 4 színnel?**
NP-teljes, mert NP-beli (tanú egy színezés, méret és ellenőrzés lásd 4. feladat), valamint visszvezethető rá a 3SZÍN probléma. Vegyünk fel egy új csúcsot, és kössük össze az összes eredeti csúccsal! Ezt a gráfot nevezzük G'-nek. Állítás: G akkor és csak akkor színezhető 3 színnel, ha G' színezhető 4 színnel. Egyik irány: ha G színezhető 3 színnel, akkor G' színezhető 4 színnel. Vegyük G-nek egy 3 színnel való színezését, az jó lesz G'-ben is, az új pont pedig kapja meg a negyedik színt. Másik irány: ha G' színezhető 4 színnel, akkor G színezhető 3 színnel. G' egy jó 4 színnel való színezésében az új pontnak mindenképp más színt kell adni, mint az összes többinek, tehát a maradékot ki kell tudni színezni 3 színnel, ami pont G-ben egy jó színezésnek felel meg. Az átalakítás polinomiális, hiszen csak egy csúcsot és n élet kell felvenni.

(c) **Van-e G-ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?**
P-beli, mert ha kiválasztunk 15 pontot az összes lehetséges módon, meg tudjuk vizsgálni konstans időben, hogy ezek egy teljes gráfot alkotnak-e. Ez $\binom{n}{15}$ lehetőség, ami n^{15} körül van, ami polinomiális.

(d) **Van-e G-ben egy legalább k pontú teljes részgráf? (k az input része.)**
NP-teljes. Egyrészt NP-beli, egy tanú k pont listája, ami legfeljebb annyi, mint a gráf csúcsainak száma, tehát polinomiális, az ellenőrzés pedig legfeljebb $\binom{k}{2}$ időt vesz igénybe. Vezessük vissza erre a problémára a MAXFTLN problémát, ahol a kérdés az, hogy egy gráfban van-e legalább k független pont. Ha G-ben m pont független, akkor $\overline{G}$-ben (G komplementere) ezek a pontok pont egy klikket fognak alkotni. G-ben tehát akkor és csak akkor van legalább k független pont, ha $\overline{G}$-ben van legalább k méretű klikk (ezt kicsit jobban ki kell fejteni). A komplementerképzés pedig polinomiális.

(e) **Van-e G-ben legalább $n/100$ hosszúságú kör?**
NP-teljes. Egyrészt NP-beli, mert egy jó tanú maga a kör (méret és ellenőrzés ideje stimmel). Másrészt vezessük vissza erre a problémára a Hamilton-kör problémát! Ha G-ben egy Hamilton-kör létezését szeretnénk megtudni, akkor definiáljunk egy G' gráfot úgy, hogy G-hez vegyünk fel $99n$ izolált pontot! Állítás: G'-ben acsa van $|V| = 100n/100 = n$ hosszú kör, ha G-ben van Hamilton-kör. Egyik irány: ha G'-ben van n hosszú kör, akkor G-ben van Hamilton-kör. Ez triviális, hiszen az izolált pontokon nem mehet kör, a maradékban egy n hosszú kör pedig pont egy Hamilton-kör G-ben. Másik irány: ha G-ben van Hamilton-kör, akkor G'-ben van n hosszú kör. Ez is triviális, hiszen G-ben egy Hamilton-kör pont n hosszú, és ez egy kör lesz G'-ben is. Az átalakítás polinom idejű, hiszen $100n$ csúcsot veszünk hozzá az eredeti gráfhoz.

(f) **Teljesül-e az Ore-feltétel?**

P-beli, mert azt kell ellenőrizni, hogy tetszőleges két öszekötetlen csúcs fokszámainak összege legalább n-e. Ez legrosszabb esetben is csak $\binom{n}{2}$ vizsgálat. *Megjegyzés:* az igenlő válasz azt jelenti, hogy van a gráfban Hamilton-kör, a nemleges válasz viszont **semmit** nem jelent, ugyanis ez egy elégséges, de nem szükséges feltétel!

(g) **Van-e G-ben legfeljebb S súlyú (egyszerű) út? (S az input része.)** NP-teljes. NP-beli azért, mert egy ilyen út egy jó tanú (méret és ellenőrzés lépésszáma is jó). A Hamilton-út problémát fogjuk visszavezetni rá. Ha a kérdés az, hogy G-ben van-e Hamilton-út, akkor vegyük fel úgy G'-t, hogy az élek és a csúcsok maradjanak, az összes élsúly pedig legyen -1. Állítás: G'-ben acsa van legfeljebb $-(n-1)$ súlyú út, ha G-ben van Hamilton-út. Egyik irány: ha G-ben van Hamilton-út, G'-ben van legfeljebb $-(n-1)$ súlyú út. G-ben egy Hamilton-út pontosan $n-1$ élből áll, amik összsúlya G'-ben pontosan $-(n-1)$, tehát van legfeljebb ilyen súlyú út. Másik irány: ha G'-ben van legfeljebb $-(n-1)$ súlyú út, akkor G-ben van Hamilton-út. G'-ben egy ilyen út legalább $n-1$ élből, kell hogy álljon (több élből viszont nem is állhat egy út), ezek az élek pedig pont egy Hamilton-utat alkotnak G-ben. Az átalakítás polinomiális, hiszen csak n darab élsúlyt kell felvenni.

(h) **Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?**
Ez ekvivalens a Hamilton-út problémával.

(i) **Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3?**
NP-teljes. NP-beli, mert maga egy ilyen feszítőfa egy jó tanú (méret és ellenőrzés lépésszáma is jó). Az előző feladatban szereplő problémát fogjuk visszavezetni rá. Ha adott G gráfunk, és kérdés, hogy van-e benne olyan feszítőfa, aminek maximális fokszáma legfeljebb kettő, akkor készítsünk egy G' gráfot, amiben G minden csúcsához hozzákötünk még egy csúcsot. Állítás: G-ben acsa van olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2, ha G'-ben van olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3. Egyik irány: ha G-ben van olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2, akkor G'-ben van olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3. Egy ilyen megfelelő G-beli feszítőfához ha hozzávesszük az újonnan bevezetett pontokat, akkor a feszítőfa minden fokszámát legfeljebb eggyel növeltük, így G'-ben egy megfelelő feszítőfát kaptunk. Másik irány: ha G'-ben van olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3, akkor G-ben van olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2. Az új csúcsok mindenképp elsőfokú leveleket alkotnak egy G'-beli feszítőfán, így ezeket elhagyva minden fokszámot legfeljebb eggyel csökkentünk. (Most egy olyan feszítőfáról beszélünk G'-ben, ahol minden csúcs fokszáma legfeljebb 3.) A maradék részgráf feszítőfa-e? Igen, hiszen ha most nem lenne összefüggő, akkor eredetileg sem lett volna az (ezt végig kell kicsit gondolni). Továbbá minden csúcsának fokszáma legfeljebb 2. Az átalakítás során n új csúcsot vettünk fel, ami polinomiális időben megtehető.

7. **Az 1 prímszám?**
Definíció szerint **nem**!

8. **Határozzuk meg az Euklidészi algoritmussal 504 és 372 legnagyobb közös osztóját!**

$$\begin{aligned} 504 &= 1 \cdot 372 + 132 \\ 372 &= 2 \cdot 132 + 108 \\ 132 &= 1 \cdot 108 + 24 \\ 108 &= 4 \cdot 24 + \mathbf{12} \\ 24 &= 2 \cdot 12 + 0, \end{aligned}$$

   tehát 12.

9. **Határozzuk meg 504 és 372 legkisebb közös többszörösét!**
   $lnko(x,y) \cdot lkkt(x,y) = x \cdot y$, ezért $lkkt(504,372) = 504 \cdot 372/12 = 15624$. Másképp is lehet, a prímfelbontások alapján $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7,\ 372 = 2^2 \cdot 3 \cdot 31$, ezért $lkkt(504,372) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31 = 15624$.

10. **Hány osztója van 504-nek?**
    A prímfelbontása $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, ezért $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$.

11. a **és** b **páratlan számok,** $c = a^2 + b^2$**. Mennyi** c **és 4 legnagyobb közös osztója?**
    Legyen $a = 2k+1$ és $b = 2l+1$, ekkor $c = (2k+1)^2+(2l+1)^2 = 4(k^2+l^2+k+l)+2$. Ekkor az Euklidészi algoritmussal

$$\begin{aligned} c &= (k^2 + l^2 + k + l) \cdot 4 + \mathbf{2} \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0, \end{aligned}$$

    vagyis 2.

12. **Van-e olyan** a **és** b **szám, hogy** $lnko(a,b) = 3$ **és** $a + b = 100$**?**
    Ebben az esetben 3 osztója mindkét számnak, azaz $a = 3k$ és $b = 3l$, ekkor $a + b = 3(k + l) = 100$, 100 viszont nem osztható hárommal, tehát nincs.

13. **Van-e olyan** a **és** b **szám, hogy** $lnko(a,b) = 5$ **és** $a + b = 100$**?**
    Igen, pl. 55 és 45.

14. **Létezik-e olyan háromjegyű szám, amely osztóinak száma osztható 11-gyel?**
    Mivel 11 prímszám, ennek a keresett számnak a prímfelbontása így néz ki: $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{10} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Ha csak a legkisebb prímszámot, 2-t engedjük meg a prímfelbontásban, akkor is már $2^{10} = 1024$ lenne az első ilyen szám, tehát háromjegyűvel biztos nem megoldható.