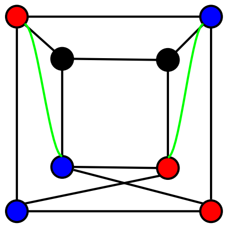
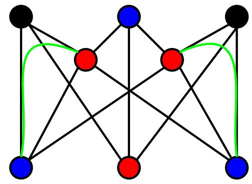
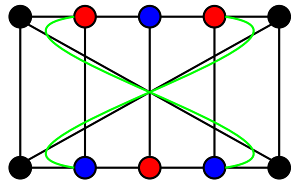
SzA VIII. gyakorlat

2007. november 14.

1. **Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?**

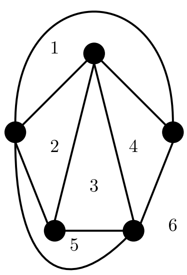




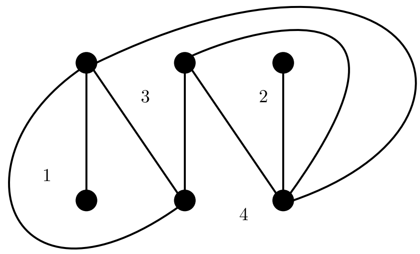
Egyik sem, mindegyikben egy $K_{3,3}$ bújik meg. Pirossal vannak jelölve a házak, kékkel a kutak, zölddel pedig az összevonásokkal képződő élek.

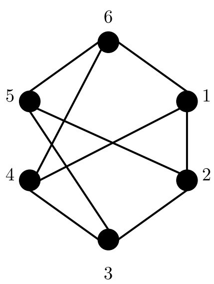
2. **Mutassuk meg, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6!**
Síkbarajzolható egyszerű gráfok esetén $e \leq 3n-6$, és ebben az esetben $n\delta(G) \leq \sum_{v\in V} d(v) = 2e$, de tudjuk, hogy $\delta(G) = 6$, tehát $e \geq 3n$, ami ellentmondás.

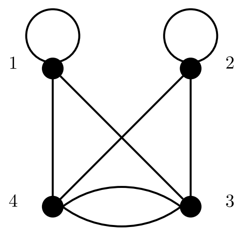
3. **Hány csúcsa van egy összefüggő, 4-reguláris síkgráfnak, ha síkbarajzolásakor 10 tartomány keletkezik?**
Az Euler-formula alapján $(n + t = e + 2)$ $n = 8$.

4. **Készítsük el az alábbi gráfok duálisát!**





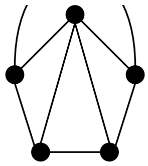




Az ábrán látható.

5. **Legyen G egy 20 pontú, összefüggő, 3-reguláris síkgráf. Hány pontja van G duálisának, G^*-nak?**
A duális pontjainak száma pont G területeinek számával lesz egyenlő, emi az Euler-formula alapján 12.

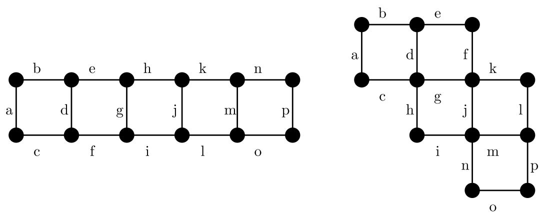
6. **Mutassunk egy olyan egyszerű G gráfot, melynek 5 pontja van, és izomorf a duálisával!**



7. **Egy nemzetközi konferencián 5 ország egy-egy képviselője ül asztalhoz. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos!**
Feltesszük, hogy az országok összefüggőek, valamint a világ nem tórusz alakú. Feleltessünk meg egy gráfban minden országnak egy csúcsot, és akkor legyen összekötve két csúcs, ha a két ország szomszédos egymással. Ennek a gráfnak síkbarajzolhatónak kell lennie. Ha viszont mindenki szomszédos lenne mindenkivel, akkor a gráf nem lenne síkbarajzolható.

8. **Legyen G egy egyszerű síkgráf, melynek n pontja, e éle és c darab összefüggő komponense van. A síkbarajzolása során t darab tartomány keletkezik. Bizonyítsuk be, hogy $n - e + t = c + 1$.**
Teljes indukcióval c-re. $c = 1$-re pont az Euler-formulát kapjuk, ezután pedig meg kell nézni, hogyan változik a n, e és t száma, ha c komponenshez hozzáveszünk mégegyet.

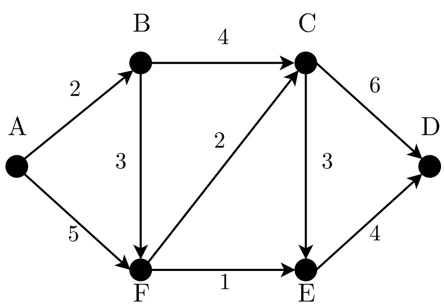
9. **Gyengén izomorf-e ez a két gráf?**



Igen, egy megfeleltetés az élek között az ábrán látható.

10. **Milyen a teljes gráf mélységi bejárása?**
Egy n hosszú út.

11. **Határozzuk meg a PERT-módszer segítségével az alábbi tevékenységekhez szükséges összidőt, és a kritikus tevékenységeket!**



Topologikus sorrend: $ABFCED$. Idők: $A:0, B:2, F:5, C:7, E:10, D:14$, és mindegyik kritikus.

12. **G egy összefüggő, irányított gráf, melynek van olyan mélységi bejárása, amelynek során keletkezett feszítőerdő csupa izolált pontból áll. Az ilyen n pontú gráfok közül hogy néz ki a minimális, illetve a maximális élszámú?**
Minimális: egy irányított út, ami pont ellentétes irányba mutat, mint ahogy vizsgáljuk a csúcsokat. Maximális: ezt kiegészítjük az összes olyan éllel, ami „visszafele" megy abba a csúcsba, ahol épp járunk.

13. **Gondoltam egy egész számot 0 és 31 között. Nyilván ki lehet barkochbázni 5 kérdéssel. Adjon meg előre 5 kérdést, úgy hogy az azokra adott válaszokból kitalálható legyen a gondolt szám!**
Rákérdezünk, hogy bináris alakban az egyes számjegyek 1 értékűek-e? Mind az 5 helyiértéket végigkérdezve pont megkapjuk.

14. **Hány összehasonlítással lehet megtalálni n elem közül a legkisebbet? (Ha kitaláltuk, hogy valamilyen k, akkor be kell bizonyítani, hogy k mindig elég, és van olyan eset, mikor k szükséges is.)**
$n-1$ mindig elég, hiszen ha mindig megtartjuk a legkisebb eddig találtat, és azzal hasonlítjuk a többit, akkor nem maradhat ki egy sem, a tranzitivitás miatt pedig a végére a legkisebb lesz a kezünkben. Ennyi szsükséges is, mert egy ellenség mindig tudhat olyat a kézbeadni, ami akár nagyobb, akár kisebb a jelenleginél.

15. **Rendezzük a következő listát beszúrásos, buborék- és összefésüléses rendezés segítségével:** $[4, 11, 9, 10, 5, 6, 8, 1, 2, 16]$**.**
Könyv alapján egyszerű.