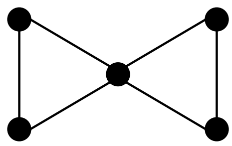
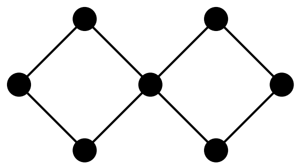
SzA VII. gyakorlat

2007. október 31.

1. **Határozzuk meg, hogy melyik az a legnagyobb k szám, amire az ábrán látható gráfok k-szorosan összefüggőek, illetve k-szorosan élösszefüggőek!**
   Ha a középső csúcsot elhagyjuk, akkor mindékt gráf szétesik több komponensre, így egyszeresen összefüggők. Hasonlóan, van olyan két él, amelyek elhagyásával megszűnik a gráfok összefüggősége, de egy élet tetszőlegesen elhagyva mindkét gráf összefüggő marad, így kétszeresen élösszefüggők.





2. **Hányszorosan pont- illetve élösszefüggő a kocka élei által alkotott gráf (a gráf csúcsai a kocka csúcsai, élei a kocka élei)?**
   Pontösszefüggőség: háromszorosan, ugyanis két csúcsot akárhogyan elhagyhatunk, de mivel minden fokszám 3, ezért 3 csúcs elhagyásával egy csúcsot izolálni tudunk. Élösszefüggőség: szintén 3, ugyanúgy indokolható, mint az előbb.

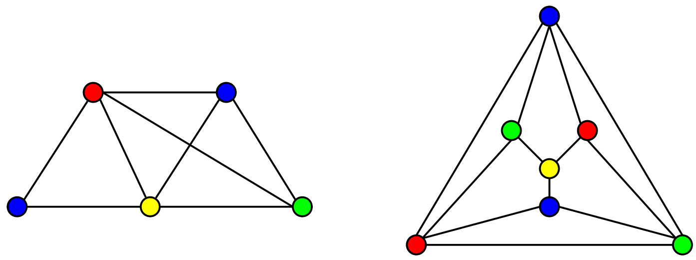
3. **Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf k-szorosan összfüggő!**
   $k = n$, mivel ha az egyik osztályból elhagyjuk az összes csúcsot, akkor a gráf szétesik. Ha viszont $n - 1$ vagy kevesebb csúcsot hagyunk el, akkor egy teljes pontosztály nem tűnhet el, így minden csúcsból a másik osztály összes maradék csúcsába megy él, tehát a gráf összefüggő maradt.

4. **Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráfban bármely két pont között létezik legalább három pontidegen út. Vegyünk fel egy új $x \notin V$ pontot és kössük össze G három különböző pontjával! Mutassuk meg, hogy a kapott G' gráfra is teljesül, hogy bármely két pontja között van legalább három pontidegen út!**
   Menger tételéből tudjuk, hogy az eredeti gráf háromszorosan összefüggő. Szeretnénk azt bizonyítani, hogy az új gráf is. Tfh G' nem háromszorosan összefüggő, vagyis van olyan két pont, amit elhagyva több komponensre esik. Ha az új csúcs is benne lenne az elhagyottak között, akkor a másik elhagyott csúcs elhagyásával az eredeti gráfnak is több komponensre kellene esnie, tehát nem lehetett volna már G sem háromszorosan összefüggő. Ha a két elhagyott csúcsközött nincs benne az új, akkor az új csúcs nem lehet izolált, hiszen három él fut belőle, így benne lesz egy új komponensben. Ez megint azt jelenti, hogy az eredeti gráf is szétesett volna több komponensre, tehát ismét ellentmondásra jutotottunk, vagyis G' is háromszorosan összefüggő, azaz bármely két csúcs között létezik legalább három pontidegen út.

5. **Bizonyítsuk be, hogy egy $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha a csúcsoknak minden valódi $\emptyset \neq X \subset V$ részhalmazából legalább k él lép ki a $V - X$ halmazba!**
   Egyik irány: k-szorosan élösszefüggő $\Rightarrow \emptyset \neq X \subset V$: legalább k él lép ki a $V - X$

halmazba. Tfh kevesebb, mint k, ekkor ha ezeket az éleket elhagyjuk, X egy külön komponenst fog alkotni, vagyis nem lehetett volna k-szorosan élösszefüggő. Másik irány: $\emptyset \neq X \subset V$: legalább k él lép ki a $V - X$ halmazba $\Rightarrow$ k-szorosan élösszefüggő. Tfh a gráf nem k-szorosan élösszefüggő. Ekkor van olyan $k-1$ él, amiket elhagyva a gráf több komponensre esik. Az egyik komponens csúcsai legyenek X, a többié pedig $V - X$. Ekkor e két halmaz között legfeljebb $k-1$ él futhatott, ami ellentmond a feltételnek.

6. **Mennyi a következő gráfok kromatikus száma:** C_4, C_5, $K_{2,4}$,



$\chi(C_4) = 2$, páros hosszú kör kromatikus száma mindig 2. $\chi(C_5) = 3$, mert páratlan kör. $\chi(K_{2,4}) = 2$, mert minden páros gráf kromatikus száma 2. A bal oldali gráfban $\omega(G) = 4$, tehát $\chi(G) \geq 4$, viszont egy 4 színnel színezést tudunk is mutatni. A jobb oldali gráfban $\chi(G) = 4$, mert bár az alsó korlát 3, a külső csúcsoknak különböző színűeknek kell lenniük, és ha ezeket kiszínezzük, a középső csúcsnak muszáj bevezetni egy negyedik színt.

7. **Egy gráf csúcsai legyenek egy $n * n$-es sakktábla mezői, ahol $n \geq 2$. Az éleket alkossák az (oldalukkal) szomszédos mezőkből álló párok! Mennyi az így kapott gráf kromatikus száma?**
Az eredeti színezéz pont jó is, ezért 2.

8. G **csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos G-ben, ha egymásból bástyával egy lépésben elérhetők. Mennyi G kromatikus száma?**
Az egy sorhoz (vagy oszlophoz) tartozó csúcsok K_8-at alkotnak, tehát biztos, hogy $\chi(G) \geq 8$. 8 szín viszont elég is, az alábbi egy jó színezés:

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 & & & & \vdots & & & \\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1
\end{array}$$

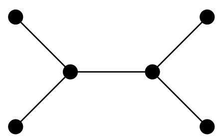
9. **Legyen G egy egyszerű gráf, amire $\chi(G) = k$. Tekintsük G-nek egy k színnel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszédságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!**
Tfh nincs ilyen piros pont. Ekkor egy tetszőleges piros pontot mindig át tudunk színezni olyan színűre, ami hiányzik a szomszédai közül. Ha ezt az összes piros pontra megcsináljuk, akkor szintén egy jó színezést kapunk, viszont így $\chi(G) = k - 1$ lenne, ami ellentmondás.

10. **Legyen G olyan (irányítatlan) gráf, melynek kromatikus száma k. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon!**
A színeknek definiáljuk egy sorrendjét! Ez lehet pl. a színek indexe. Vegyük a gráf k-színnel való színezését, majd irányítsuk úgy az éleket, hogy mindig a kisebb sorszámúból a nagyobb sorszámúval színezett csúcsba mutasson! Egyenlőség a jó színezés miatt nem állhat elő. Ebben az esetben minden, a gráfban lévő irányított útban a csúcsok színei folyamatosan növekednek, így mivel legfeljebb k színt használhatunk, egy irányított út is legfeljebb k hosszú lehet.

11. **Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges egyszerű G gráfra $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$!**
Az egy színnel színezett pontok egy jó színezésben biztos, hogy függetlenek, ezért egy szín legfeljebb $\alpha(G)$ csúcsnak lehet a színe. Mivel minden pont ki van színezve, és $\chi(G)$ színünk van, ezért $\chi(G)\alpha(G) \geq |V(G)|$, ez pedig maga az állítás.

12. **Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1 + 2e/n$!**
Tudjuk, hogy $\chi(G) \leq \Delta + 1$. Egy reguláris gráfban minden fokszám megegyezik, vagyis $n\Delta = 2e$, amiből $\Delta = 2e/n$, ezt pedig behelyettesítve megkapjuk a kívánt állítást.

13. **Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan $\chi(G)$ színnel való színezése, melyben az egyik színosztály pontosan $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?**
Nem, egy ellenpélda lehet a következő, ahol a 4 elsőfokú csúcsot azonos színűre színezve a gráfot nem lehet két színnel színezni, pedig a kromatikus száma 2.



14. **Adjuk példát minden $k \geq 2$ pozitív egész esetén olyan G_k gráfra, melynek kromatikus száma 2, de megadható a csúcsainak olyan sorrendje, hogy azokat e sorrendben színezve k színt fogunk használni! (G_k-nak tetszőleges számú csúcsa és éle lehet, mi választhatjuk meg.)**
Legyen ez a gráf $K_{k,k}$ annyi módosítással, hogy az egymással szemben levő csúcsok között töröljünk az élet! Ekkor ha kiszínezzük az első csúcsot pirosra, utána a mohó algoritmusnak odaadjuk a vele szemben lévő csúcsot, akkor azt is pirosra fogja színezni. Ez a csúcs viszont össze van kötve az összes többi másik osztálybelivel, így a piros színt többet nem használhatjuk. A többi csúcsra ugyanezt elvégezve pont k színt fog használni a mohó algoritmus (esetleg indukcióval pontosabban is be lehet látni), de ez a gráf továbbra is páros, tehát kromatikus száma 2.

15. **Legyen G olyan gráf, melynek kromatikus száma k. Legyen $A \subseteq V(G)$ a csúcsok egy olyan részhalmaza, melyben tetszőleges két pont távolsága legalább négy (két pont távolsága a közöttük vezető utak közül a minimális élszámú). Mutassuk meg, hogy az A-beli csúcsok tetszőleges $k + 1$ színnel való színezése kiterjeszthető az egész G gráf $k + 1$**

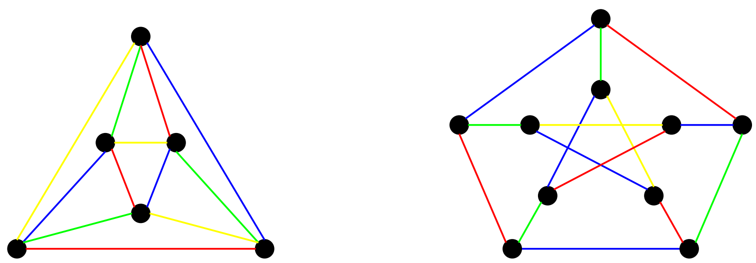
színnel való színezésévé! (Kiterjesztésen azt értjük, hogy a keresett színezésnél az A-beli csúcsok a megadott $(k+1)$-színezésük szerinti színt kapják.)

Nem írom le a teljes megoldást. A lényeg az, hogy színezzük ki k színnel a gráfot! A kimaradó szín legyen piros. Az előre megadott ($k+1$ színt használó) A színezését nézzük végig! Ahol az igényelt és az ott szereplő szín megegyezik, ott nem csinálunk semmit, ahol nem egyezik meg, azt átszínezzük az igényeltre. Ha van olyan szomszédja, ami így ütközik vele, azt átszínezzük pirosra. Ezután már csak azt kell megmutatni, hogy az így létrejövő színezés jó lesz. A lényeg az, hogy mivel a megadott csúcsok között nagy a távolság, az ő pirosra színezésük egymással nem fog ütközni.

16. **Legyen G egy 3-reguláris gráf, amire $\chi_e(G) = 3$. Tudjuk továbbá, hogy G éleinek (a színek egymás közötti permutációjától eltekintve) egyetlen jó három színnel való színezése létezik. Van-e G-ben Hamilton-kör?**

    Vegyük ezt a jó színezést, és hagyjuk el belőle a zöld éleket! Mivel minden csúcs foka 3 volt, minden csúcshoz tartozott egy zöld él is. A maradék gráfunk 2-reguláris lesz, tehát körök uniója lehet csak. Tfh több ilyen körünk van! A mostani színezésben piros és kék élek váltogatják egymást. Az egyik körben cseréljük ki az élek színét! Az eredeti gráfot visszaállítva továbbra is jó színezésünk lesz, viszont ez az eredetitől eltérő lesz, ami ellentmond a feltételeknek, vagyis a zöld élek elhagyásával pont egy Hamilton-kört kapunk.

17. **Mennyi az alábbi gráfok élkromatikus száma?**



A bal oldaliban $\Delta(G) = 4$, és egy 4 színnel való jó színezés szerepel is az ábrán. A jobb oldali gráfot ha megpróbáljuk 3 színnel kiszínezni, akkor a külső kör csak egyféle lehet (a forgatásokat és színpermutációkat leszámítva), ebből a külső kört a belsővel összekötő élek színei adódnak, és ahol a sárgát be kellett vezetni, ott nem lehetett már semelyik eredeti színt használni. Így ez csak 4 színnel élszínezhető.

18. **Legyen G 100-reguláris gráf 2001 ponton. Határozzuk meg $\chi_e(G)$ értékét!**

    Tfh $\chi_e(G) = \Delta(G) = 100$. Ekkor mivel reguláris a gráf, minden csúcsnál meg kell jelennie mind a 100 színnek. Ekkor pl. a piros élek viszont pont egy teljes párosítást alkotnának, ami a csúcsok páratlan száma miatt lehetetlen, tehát $\chi_e(G) = \Delta(G) + 1 = 101$ (Vizing-tétel!).

19. **Mycielski-konstrukciót használva rajzoljunk olyan M_k gráfokat, ahol $\omega(M_k) = 2$, $\chi(M_k) = k$, $k = \{2, 3, 4\}$! De tényleg, a szabályt használva, gyakorlás miatt!**

    Könyv, gyakorlat, stb.

20. **Jelölje M_k a Mycielski-konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k. Milyen k értékekre tartalmaz M_k Euler-kört?**
$k = 2$-re biztos nem, ugyanis 2 csúcs és egy él van ebben a gráfban. M_3 megegyezik C_5-tel, így van benne Euler-kör. A k-adik lépésben az egyik csúcs fokszáma pont M_{k-1} csúcsainak számával fog megegyezni, viszont ez minden esetben páratlan, hiszen $n_k = 2n_{k-1} + 1$, vagyis $k \geq 3$ esetén páratlan csúcsa van M_k-nak. Így az egyetlen megoldás $k = 3$.