

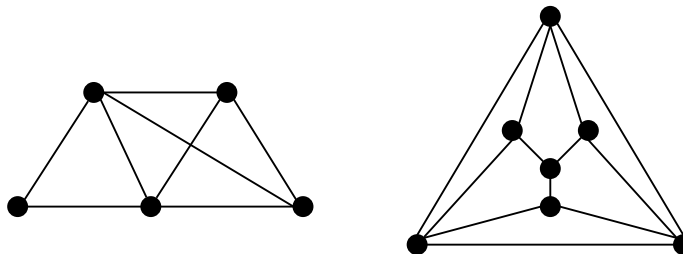
SzA VII. gyakorlat

2007. október 31.

1. Határozzuk meg, hogy melyik az a legnagyobb k szám, amire az ábrán látható gráfok k -szorosán összefüggőek, illetve k -szorosán élösszefüggőek!

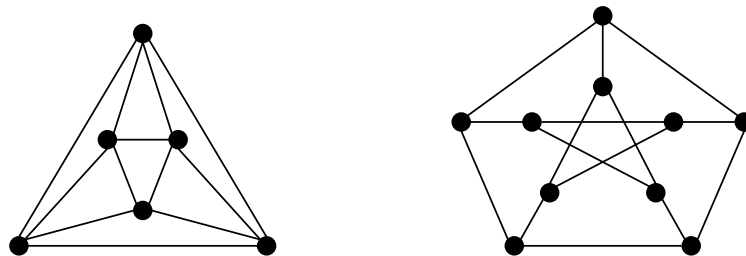


2. Hányszorosán pont- illetve élösszefüggő a kocka élei által alkotott gráf (a gráf csúcsai a kocka csúcsai, élei a kocka élei)?
3. Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf k -szorosán összefüggő!
4. Tegyük fel, hogy a $G = (V, E)$ gráfban bármely két pont között létezik legalább három pontidegen út. Vegyünk fel egy új $x \notin V$ pontot és kössük össze G három különböző pontjával! Mutassuk meg, hogy a kapott G' gráfra is teljesül, hogy bármely két pontja között van legalább három pontidegen út!
5. Bizonyítsuk be, hogy egy $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor k -szorosán élösszefüggő, ha a csúcsoknak minden valódi $\emptyset \neq X \subset V$ részhalmazából legalább k él lép ki a $V - X$ halmazba!
6. Mennyi a következő gráfok kromatikus száma: C_4 , C_5 , $K_{2,4}$,



7. Egy gráf csúcsai legyenek egy $n * n$ -es sakktábla mezői, ahol $n \geq 2$. Az éleket alkossák az (oldalukkal) szomszédos mezőkből álló párok! Mennyi az így kapott gráf kromatikus száma?
8. G csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos G -ben, ha egymásból bástyával egy lépésben elérhetők. Mennyi G kromatikus száma?
9. Legyen G egy egyszerű gráf, amire $\chi(G) = k$. Tekintsük G -nek egy k szín-
nel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk
be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek
szomszédságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!
10. Legyen G olyan (irányítatlan) gráf, melynek kromatikus száma k . Bizonyítsuk
be, hogy ekkor G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfel-
jebb k pontot tartalmazzon!

11. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges egyszerű G gráfra $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$!
12. Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1 + 2e/n$!
13. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan $\chi(G)$ színnel való színezése, melyben az egyik színosztály pontosan $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?
14. Adjuk példát minden $k \geq 2$ pozitív egész esetén olyan G_k gráfra, melynek kromatikus száma 2, de megadható a csúcsainak olyan sorrendje, hogy azokat e sorrendben színezve k színt fogunk használni! (G_k -nak tetszőleges számú csúcsa és éle lehet, mi választhatjuk meg.)
15. Legyen G olyan gráf, melynek kromatikus száma k . Legyen $A \subseteq V(G)$ a csúcsok egy olyan részhalmaza, melyben tetszőleges két pont távolsága legalább négy (két pont távolsága a közöttük vezető utak közül a minimális élszámú). Mutassuk meg, hogy az A -beli csúcsok tetszőleges $k + 1$ színnel való színezése kiterjeszthető az egész G gráf $k + 1$ színnel való színezésévé! (Kiterjesztésen azt értjük, hogy a keresett színezésnél az A -beli csúcsok a megadott $(k + 1)$ -színezésük szerinti színt kapják.)
16. Legyen G egy 3-reguláris gráf, amire $\chi_e(G) = 3$. Tudjuk továbbá, hogy G éleinek (a színek egymás közötti permutációjától eltekintve) egyetlen jó három színnel való színezése létezik. Van-e G -ben Hamilton-kör?
17. Mennyi az alábbi gráfok élkromatikus száma?



18. Legyen G 100-reguláris gráf 2001 ponton. Határozzuk meg $\chi_e(G)$ értékét!
19. Mycielski-konstrukciót használva rajzoljunk olyan M_k gráfokat, ahol $\omega(M_k) = 2$, $\chi(M_k) = k$, $k = \{2, 3, 4\}$! De tényleg, a szabályt használva, gyakorlás miatt!
20. Jelölje M_k a Mycielski-konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k . Milyen k értékekre tartalmaz M_k Euler-kört?