SzA IV. gyakorlat

2007. október 10.

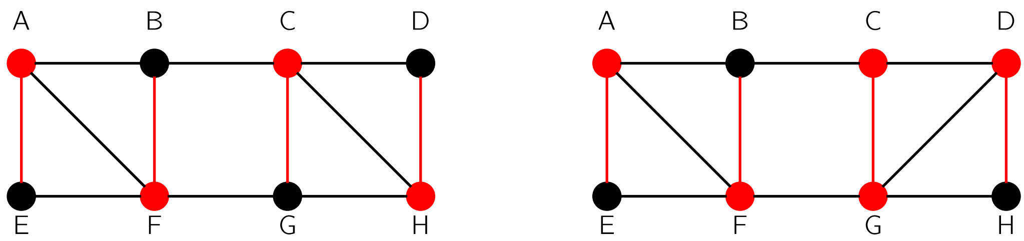
1. **Egy iskolában a diákok különféle bizottságokat választottak. Egy ember több bizottságnak is tagja lehet. Most minden bizottság a saját tagjai közül egy elnököt szeretne választani. Bármely bizottság bármely tagja jó elnöknek, de azt szeretnék, hogy egy ember ne legyen több bizottságnak is elnöke. Mikor valósítható ez meg?**
   Definiáljunk egy páros gráfot úgy, hogy az egyik csúcshalmaznak a bizottságok, a másiknak pedig a diákok feleljenek meg. Két csúcs között akkor fut él, ha az adott diák tagja az adott bizottságnak. Könnyen látható, hogy egy, a bizottságokat lefedő párosítás pont egy megfelelő bizottság-elnök hozzárendelésnek felel meg. Így pontosan akkor tehető ez meg, ha a gráfban teljesül a Hall-feltétel.

2. **A** $V = \{2, 3, \dots, 2007\}$ **ponthalmazon definiáljuk a** $G(V, E)$ **gráfot úgy, hogy** $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \nmid y \wedge y \nmid x$**! (**$a \nmid b$**:** a **nem osztója** b**-nek.) Van-e** G**-ben teljes párosítás?**
   Igen, van. A szomszédos számok relatív prímek, így fut közöttük él. A $(2, 3), (4, 5) \dots (2006, 2007)$ pont egy teljes párosítás lesz.

3. **Egy** G **összefüggő gráf olyan, hogy tetszőleges pontját elhagyva a maradék gráfban létezik teljes párosítás. Bizonyítsuk be, hogy** G**-ben nincs elvágó él! (Egy él elvágó, hogyha az élet elhagyva megszűnik a gráf összefüggősége.)**
   Tfh van egy ilyen tulajdonságú gráfunk, mégis van benne elvágó él. A gráf csúcsainak száma páratlan, mert egy pontot elhagyva egy olyan gráfot kapunk, amiben van teljes párosítás, így páros sok csúcsa van. Nézzünk most egy elvágó élet! Ez az él nyilván két komponensre osztja a gráfot, az egyiknek páros, a másiknak páratlan sok csúcsa van. Hagyjuk most el ennek az élnek azt a csúcsát, amelyik a páros csúcsszámú komponenshez tartozik! A gráf így két összefüggő komponensre esik szét, mindkettőnek páratlan sok csúcsa van. Ebben kellene léteznie teljes párosításnak, de ez lehetetlen, mert ehhez a két komponens között is futnia kellene élnek.

4. **Tegyük fel, hogy a** G **gráf minden összefüggő komponense egy kör. Mi az a legkisebb** m **szám, amire teljesül, hogy** G**-hez hozzá lehet venni** m **(megfelelően választott) élet úgy, hogy az új gráfban legyen teljes párosítás? Mikor létezik ilyen** m **szám?**
   A páros körök nem számítanak, bennük biztos, hogy van teljes párosítás. Ha páratlan darab páratlan kör van a gráfban, akkor összesen páratlan sok csúcs van, így nincs ilyen m szám. Ha páros sok páratlan kör van, akkor mindegyikben csináljunk egy maximális párosítást, így mindegyikben pont egy csúcs fog párosítatlanul maradni. Számozzuk meg ezeket a kimaradt csúcsokat $1 \dots p$-ig (p legyen a páratlan körök száma), és vegyünk fel éleket így: $(1, 2), (3, 4) \dots (p-1, p)$. Így már lesz teljes párosítás, felesleges élet nem vettünk fel, és $m = p/2$.

5. **Adjunk meg maximális független élhalmazt és minimális lefogó ponthalmazt az ábrán látható gráfokban!**



$\{(A,E),(B,F),(C,G),(D,H)\}$ mindkét gráfban teljes párosítás, így maximális független élhalmaz is. A bal oldalon $\{A,C,F,H\}$ egy lefogó ponthalmaz, és minimális is, mivel $\tau \geq \nu$, és itt az egyenlőség teljesül. A jobb oldalon $\{A,E,F\}$ és $\{D,G,H\}$ közül egyenként legalább 2, összesen tehát legalább 4 csúcsot ki kell választani, és ekkor még biztos, hogy ki fog maradni él (B,C), így $\tau \geq 5$. $\{A,C,D,F,G\}$ viszont pont jó is.

6. **A 2000 csúcsú G gráfban $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!**
   Tudjuk, hogy $\tau(G) \geq \nu(G)$, és egy teljes párosítás esetén $\nu(G) = n/2$. Ebből $678 = \tau(G) \geq \nu(G) = 1000$ ellentmondás, tehát nem lehet a gráfban teljes párosítás.

7. **Igazoljuk, hogy az n pontú G páros gráfban $\alpha(G) \geq n/2$!**
   Egy páros gráfban a két pontosztály közül az egyik csúcsszáma mindig $\geq n/2$. Az egy osztályba tartozó csúcsok között biztos nem megy él, ezért egy osztály összes csúcsa független, és ha a nagyobb csúcsszámú osztályt vesszük, pont az állítást kapjuk.

8. **Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a $G = K_{n,m}$ teljes páros gráfra!**
   A teljes páros gráfban a kisebbik csúcsszámú osztályt lefedő párosítás biztos létezik, ennél nagyobb nem is lehet, így $\nu(G) = \min\{n,m\}$. König tétele értelmében $\nu(G) = \tau(G)$, ezért $\tau(G) = \min\{n,m\}$. Gallai tétele miatt $\alpha(G) = |V| - \tau(G) = (n+m) - \min\{n,m\} = \max\{n,m\}$. Ismét König tétele alapján $\rho(G) = \alpha(G) = \max\{n,m\}$.

9. **Mutassuk meg, hogy ha az n pontú G gráfban nincs hurokél és $\tau(G) = n-1$, akkor $G = K_n$!**
   Tfh mégsem teljes gráf, vagyis $\exists u,v : (u,v) \notin E$. Ha minden csúcsot beválasztunk u-n és v-n kívül a lefogó pontok közé, akkor több csúcsra már nincs is szükségünk, hiszen az u-ba és v-be futó összes él is le van fogva a másik végpontja által (és természetesen a gráf összes többi éle is). Így kiderült, hogy $\tau(G) \leq n-2$, ami ellentmond a feltételnek.

10. **A G gráfnak $2n$ pontja van és tudjuk, hogy minden pont foka legalább n. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\rho(G)$ értékét!**
    A Dirac-tétel miatt a gráfban van Hamilton-kör, és mivel páros csúcsa van a gráfnak, a Hamilton-kör minden második élét kiválasztva egy teljes párosítást kapunk, vagyis $\nu(G) = 2n/2 = n$. Gallai tétele szerint pedig $\rho(G) = |V| - \nu(G) = 2n - n = n$.

11. **Legyen egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \geq n$!**

Tudjuk, hogy a fentiek miatt $\nu(G) = n$, viszont azt is tudjuk, hogy $\tau(G) \geq \nu(G) = n$.

12. **Egy gráfból válasszunk független éleket a következő mohó algoritmussal: sorban vesszük G éleit, és ha a következő él független a már kiválasztottaktól, akkor azt is belevesszük a független élek közé. Bizonyítsuk be, hogy így legalább $\nu(G)/2$ független élt találunk!**
Legyen M egy maximális párosítás, és M_m egy olyan párosítás, amit az algoritmusunk talált. Tudjuk, hogy $|M| = \nu(G)$. Ha lenne olyan él M-ben, aminek egyik végpontjához tartozó él sem szerepel M_m-ben, akkor ezt biztos bevette volna a mohó algoritmus. Így M élei közül mindegyiknek legalább egy csúcsa szerepel M_m-ben is, tehát $M_m \geq \nu(G)/2$.

13. **Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$! $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszáma.**
Egy v csúcs pontosan $d(v)$ élet tud lefogni, és ha T egy minimális lefogó csúcshalmaz, akkor
$$\sum_{v \in T} d(v) \geq |E|,$$
hiszen T csúcsai az összes élet lefogják (lehet, hogy egy élet több csúcs is). Ha a bal oldalon a fokszámokat helyettesítjük a maximális fokszámmal, akkor a kifejezés értéke biztos nem csökken, tehát
$$\sum_{v \in T} \Delta(G) \geq \sum_{v \in T} d(v) \geq |E|,$$
viszont itt pontosan $|T| = \tau(G)$-szer adtuk össze $\Delta(G)$-t, vagyis $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$.

14. **Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög- és hurokmentes G gráfban $\alpha(G)\tau(G) \geq |E|$!**
Mivel G-ben nincs háromszög, egy tetszőleges csúcs szomszédai egy független halmazt alkotnak. Így az összes fokszám legfeljebb $\alpha(G)$ lehet, azaz $\alpha(G) \geq \Delta(G)$ miatt $\alpha(G)\tau(G) \geq \Delta(G)\tau(G) \geq |E|$ az előző feladat eredményét felhasználva.