# SzA IV. gyakorlat

## 2007. október 10.

### Hasznos tudnivalók

- **ZH időpont: október 15. hétfő 17:15-18:55**. Terembeosztás:

| | |
|---|---|
| CH MAX | A-Föl |
| CH C14 | Fre-Kaz |
| K Aud Max | Kel-Nád |
| Ka26 | Nagy-Sip |
| Ka51 | Soh-Tót |
| K2 53 | Tör-Zso |

- Tutte: $G(V, E)$ gráfban $\exists$ teljes párosítás $\Leftrightarrow$ $G$-ből elhagyva tetszőleges $S \subseteq V$ pontokat a keletkező gráf páratlan csúcsú komponenseinek száma nem nagyobb $|S|$-nél.
- $\alpha(G)$: független csúcsok maximális száma $G$-ben
- $\nu(G)$: független élek maximális száma $G$-ben (maximális párosítás)
- $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma $G$-ben
- $\tau(G)$: lefogó csúcsok minimális száma $G$-ben
- $\alpha(G) \leq \rho(G)$, $\nu(G) \leq \tau(G)$
- Gallai: $\alpha(G) + \tau(G) = n$, $\nu(G) + \rho(G) = n$
- König: páros gráfokra! $\nu(G) = \tau(G)$; $\alpha(G) = \rho(G)$, ha nincs izolált pont

### Feladatok

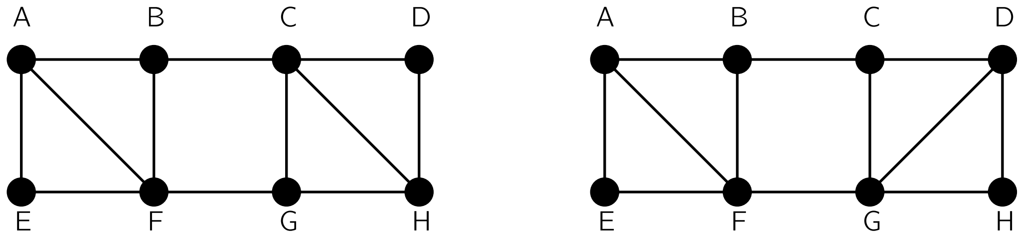
1. Egy iskolában a diákok különféle bizottságokat választottak. Egy ember több bizottságnak is tagja lehet. Most minden bizottság a saját tagjai közül egy elnököt szeretne választani. Bármely bizottság bármely tagja jó elnöknek, de azt szeretnék, hogy egy ember ne legyen több bizottságnak is elnöke. Mikor valósítható ez meg?

2. A $V = \{2, 3, \dots, 2007\}$ ponthalmazon definiáljuk a $G(V, E)$ gráfot úgy, hogy $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \nmid y \wedge y \nmid x$! ($a \nmid b$: $a$ nem osztója $b$-nek.) Van-e $G$-ben teljes párosítás?

3. Egy $G$ összefüggő gráf olyan, hogy tetszőleges pontját elhagyva a maradék gráfban létezik teljes párosítás. Bizonyítsuk be, hogy $G$-ben nincs elvágó él! (Egy él elvágó, hogyha az élet elhagyva megszűnik a gráf összefüggősége.)

4. Tegyük fel, hogy a $G$ gráf minden összefüggő komponense egy kör. Mi az a legkisebb $m$ szám, amire teljesül, hogy $G$-hez hozzá lehet venni $m$ (megfelelően választott) élet úgy, hogy az új gráfban legyen teljes párosítás? Mikor létezik ilyen $m$ szám?

5. Adjunk meg maximális független élhalmazt és minimális lefogó ponthalmazt az ábrán látható gráfokban!




6. A 2000 csúcsú $G$ gráfban $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy $G$-ben nincs teljes párosítás!

7. Igazoljuk, hogy az $n$ pontú $G$ páros gráfban $\alpha(G) \geq n/2$!

8. Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a $G = K_{n,m}$ teljes páros gráfra!

9. Mutassuk meg, hogy ha az $n$ pontú $G$ gráfban nincs hurokél és $\tau(G) = n - 1$, akkor $G = K_n$!

10. A $G$ gráfnak $2n$ pontja van és tudjuk, hogy minden pont foka legalább $n$. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\rho(G)$ értékét!

11. Legyen egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább $n$. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \geq n$!

12. Egy gráfból válasszunk független éleket a következő mohó algoritmussal: sorban vesszük $G$ éleit, és ha a következő él független a már kiválasztottaktól, akkor azt is belevesszük a független élek közé. Bizonyítsuk be, hogy így legalább $\nu(G)/2$ független élt találunk!

13. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$! $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszáma.

14. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög- és hurokmentes G gráfban $\alpha(G)\tau(G) \geq |E|$!