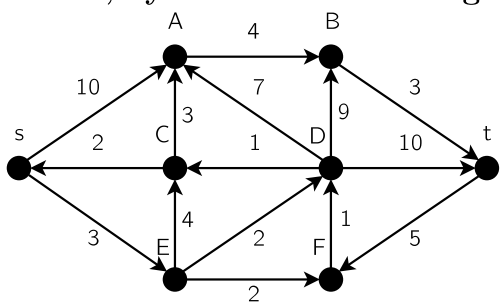
SzA III. gyakorlat

2007. október 3.

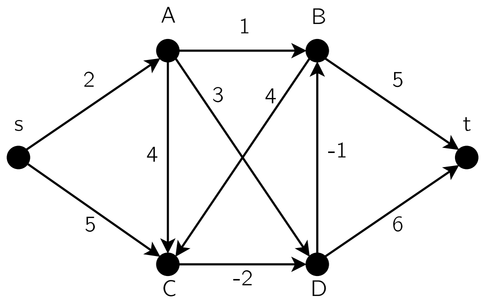
1. **Határozzuk meg a Dijkstra-algoritmussal a legrövidebb utat s és t között, nyomon követve az algoritmust!**



Az algoritmus benne van a könyvben, a végeredmény 15.

2. **Dijkstra algoritmusa csak két tetszőleges pont között vezető legrövidebb út hosszát határozza meg. Módosítsuk az algoritmust úgy, hogy a legrövidebb utat (vagy azok egyikét) is megkaphassuk!**
Felveszünk mégegy tömböt, amiben az elemek a csúcsoknak felelnek meg. Amikor találunk egy csúcshoz egy, az edddiginél rövidebb utat, akkor az új tömbbe feljegyezzük, hogy honnan jutottunk ide. Így mikor az algoritmus leáll, a tömbben minden csúcshoz meglesz, hogy honnan kell odaérkezni, így visszafele ténylegesen fel lehet építeni a legrövidebb utat.

3. **Határozzuk meg a Bellmann-Ford algoritmussal a legrövidebb utat s és t között, nyomon követve az algoritmust!**



A végeredmény 7.

4. A szoftverpiacon n féle grafikus formátum közötti oda-vissza konverzióra használatos programok találhatók: az i-edik és a j-edik között oda-vissza fordító program ára a_{ij}, futási ideje pedig t_{ij} (ha létezik).

   (a) **Javasoljunk módszert annak megtervezésére, hogy minden egyes formátumról egy általunk preferált grafikus formátumra a lehető leggyorsabban képesek legyünk konvertálni! (Az ár nem számít, csak GPL-es programokat tekintünk.)** Definiálunk egy gráfot, melyben a csúcsok felelnek meg a formátumoknak, az élek pedig a közöttük levő konverziók. Az élsúlyok a futási idők. Ebben a gráfban kell megkeresni az általunk preferált formátumhoz tartozó csúcsból az összes többibe vezető legrövidebb utat, amit pl. Dijsktra algoritmussal megtehetünk.

(b) **Közbeszerzési eljárás keretében szeretnénk megoldani a formátumok közötti konvertálást, így egy ismerősünk cégének speciális árlistáját nézzük. Javasoljunk módszert annak eldöntésére, hogy mely programokat vásároljuk meg, ha a lehető legolcsóbban szeretnénk képesek lenni bármelyik formátumról bármelyik másikra való konvertálásra!** Hasonló gráfot definiálunk, mint az előbb, csak itt az élsúlyok a költségek. Ebben a gráfban minimális összsúlyú feszítőfát kell keresni, amit megtehetünk pl. a Kruskal-algoritmussal.

5. **Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!**
   Válasszunk ki t fiút! Ha $t \leq 6$, akkor már egyiküknek is legalább 6 lányismerőse van. Ha $t \geq 7$, akkor tfh összesen kevesebb, mint t lányt ismernek. Ekkor egy olyan lány fiúismerőseinek száma, akit egyikőjük sem ismer: $12 - t \leq 5$, ami ellentmond a feltételnek. Ezek alapján tetszőleges t fiúnak összesen legalább t lányismerőse van, tehát tudunk adni egy teljes párosítást (Frobenius-tétel).

6. **A $G = (A, B, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és az A osztály minden valódi X részhalmazára (azaz $\emptyset \subset X \subset A$) teljesül, hogy $|N(X)| > |X|$. Igazoljuk, hogy G tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítássá!**
   Hagyjuk el a kiválasztott élet a hozzátartozó csúcsokkal együtt! Az így keletkező gráfban minden szomszédság legfeljebb egy elemmel csökken, így $|N'(X)| \geq |N(X)| - 1 \geq |X|$ tetszőleges $X \subseteq A$-ra, kihasználva, hogy $|N(X)| > |X|$. A módosított gráfban a Frobenius-tétel szerint tehát van teljes párosítás, ehhez pedig hozzávehetjük az eredetileg választott élet, amivel már az eredeti gráfban is teljes párosításunk lesz.

7. **Legyen $G = (A, B, E)$ egy egyszerű páros gráf, melyben minden A-beli pont fokszáma azonos (d_A), és minden B-beli pont fokszáma is azonos (d_B). Tegyük fel, hogy $d_A, d_B > 0$. Mutassuk meg, hogy G-ben akkor és csak akkor létezik A-t lefedő párosítás, ha $|A| \leq |B|$!**
   Egyik irány: ha van A-t lefedő teljes párosítás, akkor mindegyik A-beli csúcsnak kell pár B-ben, így $|A| \leq |B|$. Másik irány: tudjuk, hogy $|A| \leq |B|$. Az élek számát felírhatjuk kétféleképpen is: $|A|d_A = |B|d_B$, ebből következik, hogy $d_A \geq d_B$. Vegyünk egy tetszőleges $X \subseteq A$ halmazt. Belőle csak $N(X)$-be futnak élek, míg $N(X)$-ből legalább annyi élnek kell futnia, mint amennyi X-ből belefut: $|N(X)|d_B \geq |X|d_A$, amiből következik, hogy $|N(X)| \geq |X|$, vagyis létezik A-t lefedő párosítás a Hall-tétel miatt.

8. **Egy szigeten n család lakik. A Sziget Vadászati Elöljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet n egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet, n mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdasági- és egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?**

Definiáljunk egy páros $G(V, M, E)$ gráfot úgy, hogy egyik csúcsosztályba tartoznak a vadászterületek, másikba a mezőgazdasági területek, egy vadász- és mezőgazdasági terület pedig pontosan akkor van összekötve, ha a kettőnek van közös része. Könnyen látszik, hogy pontosan akkor létezik megfelelő területkiosztás, ha G-ben létezik teljes párosítás. Vegyünk egy tetszőleges $X \subseteq V$ halmazt! Az ezekhez a csúcsokhoz tartozó összterület $|X|T/n$, ha T a sziget területe. Tfh kevesebb, mint $|X|$ mezőgazdasági területtel van közös területe X-nek. Ez azt jelenti, hogy $|X|T/n$ területet kellene lefedni kevesebb, mint $|X|$ darab T/n méretű területtel, ami nyilvánvalóan lehetetlen. Ezek alapján teljesül a Hall-feltétel, valamint $|V| = |M|$, tehát létezik teljes párosítás.

9. **Hány különböző teljes párosítása lehet egy n szögpontú (n csúcsú) fának?**
   Ha n páratlan, akkor 0. Ha $n = 2$, akkor 1. Sejtésünk az, hogy tetszőleges n-re legfeljebb 1. Mint láttuk, $n = 1$-re és $n = 2$-re ez igaz, tfh tetszőleges $n - 1$-re is igaz (teljes indukció). Szeretnénk belátni, hogy n-re is jó. Mivel fáról beszélünk, biztos van benne elsőfokú csúcs, legyen ez x, és az a csúcs, aki a szomszédja, y. Hagyjuk el x-et és (x, y) élet! A maradék gráf is egy fa, $n - 1$ csúccsal, amiben az indukciós feltevés miatt legfeljebb 1 teljes párosítás van. Ha x-et és (x, y) élt hozzávesszük, akkor az új gráfban ha van teljes párosítás, akkor (x, y) élt kötelező bevenni, nincs választási lehetőségünk, tehát egynél több párosításunk most sem lehet.

10. **G páros gráf. Igaz-e, hogy ha G-ben van Hamilton-kör, akkor van benne teljes párosítás? Igaz-e az állítás megfordítása?**
    Igaz, mert egy páros gráfban minden kör páros hosszú, így egy Hamilton kör is, aminek minden második éle pont egy teljes párosítást ad. Megfordítva nem igaz, pl. egy $2k$ csúcsú páros gráfban, ahol minden pont foka 1, van teljes párosítás, de Hamilton-kör biztos nincs.