SzA III. gyakorlat

2007. október 3.

Az előző gyakorlathoz

egy fa ága vége
nem nő rá a gyökerére
se más ágra
se törzsére
(körmentes)

egy hangya ha elindulna
bármely ágról eljuthatna
bármely ágra
bármely pontba
(összefüggő)

hangyánk ha nem boldogulna
lepottyanva
földön mászna
törzsön kúszna
(ez bizony már erdő volna)

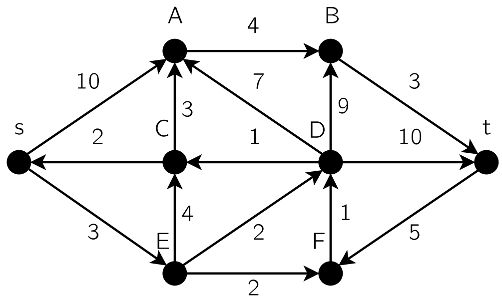
LEHEL JENŐ

Hasznos tudnivalók

- Frobenius-tétel: Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban acsa van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és $\forall X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$.
- Hall-tétel: Egy $G = (A, B, E)$ páros gráfban acsa van az A pontosztályt lefedő párosítás, ha $\forall X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$.
- Az első ZH-ban szereplő legutolsó anyag: párosítások!

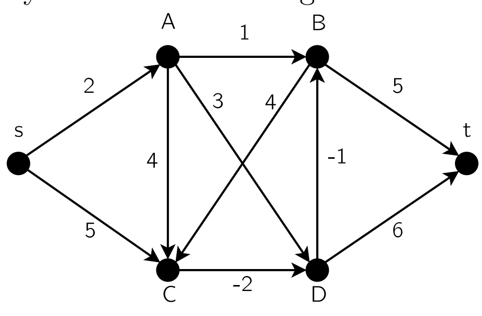
Feladatok

1. Határozzuk meg a Dijkstra-algoritmussal a legrövidebb utat s és t között, nyomon követve az algoritmust!



2. Dijkstra algoritmusa csak két tetszőleges pont között vezető legrövidebb út hosszát határozza meg. Módosítsuk az algoritmust úgy, hogy a legrövidebb utat (vagy azok egyikét) is megkaphassuk!

3. Határozzuk meg a Bellmann-Ford algoritmussal a legrövidebb utat s és t között, nyomon követve az algoritmust!



4. A szoftverpiacon n féle grafikus formátum közötti oda-vissza konverzióra használatos programok találhatók: az i-edik és a j-edik között oda-vissza fordító program ára a_{ij}, futási ideje pedig t_{ij} (ha létezik).

   (a) Javasoljunk módszert annak megtervezésére, hogy minden egyes formátumról egy általunk preferált grafikus formátumra a lehető leggyorsabban képesek legyünk konvertálni! (Az ár nem számít, csak GPL-es programokat tekintünk.)

   (b) Közbeszerzési eljárás keretében szeretnénk megoldani a formátumok közötti konvertálást, így egy ismerősünk cégének speciális árlistáját nézzük. Javasoljunk módszert annak eldöntésére, hogy mely programokat vásároljuk meg, ha a lehető legolcsóbban szeretnénk képesek lenni bármelyik formátumról bármelyik másikra való konvertálásra!

5. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!

6. A $G = (A, B, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és az A osztály minden valódi X részhalmazára (azaz $\emptyset \subset X \subset A$) teljesül, hogy $|N(X)| > |X|$. Igazoljuk, hogy G tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítássá!

7. Legyen $G = (A, B, E)$ egy egyszerű páros gráf, melyben minden A-beli pont fokszáma azonos (d_A), és minden B-beli pont fokszáma is azonos (d_B). Tegyük fel, hogy $d_A, d_B > 0$. Mutassuk meg, hogy G-ben akkor és csak akkor létezik A-t lefedő párosítás, ha $|A| \leq |B|$!

8. Egy szigeten n család lakik. A Sziget Vadászati Elöljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet n egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet, n mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdaságiés egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?

9. Hány különböző teljes párosítása lehet egy n szögpontú (n csúcsú) fának?

10. G páros gráf. Igaz-e, hogy ha G-ben van Hamilton-kör, akkor van benne teljes párosítás? Igaz-e az állítás megfordítása?