SzA II. (III.) gyakorlat

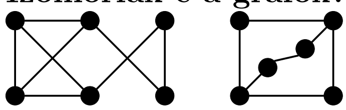
2007. szeptember 26.

1. **Hány éle van az n csúcsú teljes gráfnak?**
   $\binom{n}{2}$, mert egy élhez n csúcsból kell kettőt kiválasztani.

2. **Bizonyítsd be, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros!**
   Tfh nem igaz, vagyis a páratlan fokszámú pontok száma páratlan. Ekkor írjuk fel a fokszámok összegét:
   $$\sum_{v \in V} d(v) = 2e,$$
   ahol a jobb oldalon egy páros szám áll. A bal oldal paritásában nem számítanak a páros fokszámok, így páratlan darab páratlan fokszám összege is páratlan, tehát a bal oldal páratlan, ami lehetetlen, tehát páros darab páratlan fokszámú pontnak kell lennie.

3. **Van-e olyan (legalább 2 pontú) egyszerű gráf, melyben minden pont foka különböző?**
   Mivel a legnagyobb fokszám $n-1$ lehet, ezért $0 \ldots n-1$ fokú csúcsoknak kell lenni egy ilyen gráfban. Ha viszont van egy $n-1$-ed fokú, akkor nem lehet 0 fokú, így nem létezhet ilyen egyszerű gráf.

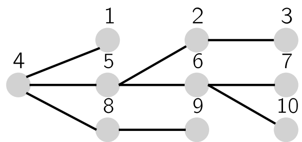
4. **Egy gráf izomorf a komplementerével. Mutassuk meg, hogy összefüggő!**
   Tfh nem összefüggő. Ekkor léteznek olyan x és y csúcsok melyek különböző komponensben vannak, és a komplementerben közöttük nyilván vezet él. Vegyünk most egy tetszőleges harmadik z csúcsot: ha x és y közül egyikkel az eredeti gráfban nincs összekötve, akkor a komplementerben mindenképp egy komponensben lesz x-szel és y-nal is. Mindkettővel nem lehetett összekötve, mert akkor x és y nem lett volna különböző komponensben. Ezek alapján a komplementer összefüggő (tetszőleges két csúcs között vezet út), viszont egy összefüggő gráf nem lehet izomorf egy nem összefüggővel, így az eredeti gráfnak összefüggőnek kellett lennie.

5. **Izomorfak-e a gráfok? Van-e bennük Euler-út ill. -kör?**
   
   Nem izomorfak, mert az egyikben 4 db, a másikban pedig 2 db harmadfokú csúcs van. Mivel mindkettőben van páratlan fokszámú csúcs, ezért Euler-kör nincs bennük. A jobboldaliban két páratlan fokszámú csúcs van, így Euler-út van benne.

6. **Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű gráf akkor és csak akkor fa, ha egy pontból áll vagy bármely két pontját pontosan egy út köti össze!**
   Egyik irány: akkor fa, ha egy pontból áll vagy bármely két pontját pontosan egy út köti össze. Ha egy pontból áll, akkor triviális. Ha több pontból áll, akkor ha két pontja között nem menne út, akkor nem lenne öf, tehát fa sem lehetne, ha pedig két pontja között több út is menne, akkor nem lenne körmentes, tehát

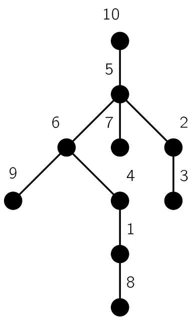
szintén nem lehetne fa. Másik irány: ha bármely két pontját pontosan egy út köti össze, akkor fa. Tfh nem fa ekkor vagy nem öf, viszont akkor lenne két olyan pontja, ami között nem megy út, vagy van benne kör, viszont ekkor egy kör tetszőleges két pontja között legalább két út megy.

7. **Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n-3$!**
   Tfh a másodfokú pontok száma $n-3$. Ekkor mivel van legalább két elsőfokú pont, már csak egy pont fokszáma kérdéses. Tudjuk, hogy $n-1$ él van, így a fokszámok összege $1+1+(n-3)\cdot 2+d = 2e = 2\cdot(n-1)$, ahonnan $d=2$ adódna, viszont ami ellentmond a feltételnek.



8. **Mi a Prüfer-kódja ennek fának?**
   42568456, a lépéseket nem írom le, benne van a könyvben.

9. **Rajzoljuk le azt a fát, aminek $2,5,5,1,4,6,6,5$ a Prüfer-kódja!**
   A módszer benne van a könyvben, az eredmény:

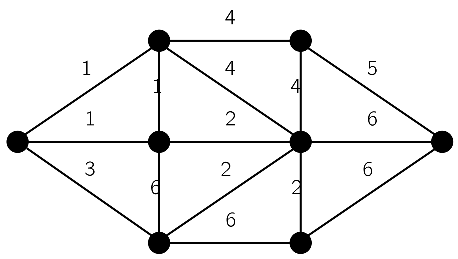


10. **Egy n pontú fa Prüfer-kódjában k különböző szám szerepel. Hány elsőfokú pontja lehet ekkor a fának?**
    $n-k$, mert vagy előbb „töröljük le”, mint a szomszédját, ezért nem szerepel a kódban, vagy a legnagyobb sorszámú elsőfokú, és ezért nem szerepel a kódban.

11. **Hány olyan különböző fa adható meg n címkézett ponton, amely nem út?**
    Cayley-tétel alapján a különböző fák száma n^{n-2}. Egy út az ténylegesen a csúcsok egy permutációja, ezeket majd le kell vonni, de előbb vegyük észre, hogy egy útnak két permutáció felel meg (oda és vissza). A végeredmény tehát: $n^{n-2} - n!/2$

12. **Hány éle van az n pontú egyszerű összefüggő gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?**
    A gráfban biztosan van kör, különben nem lehetne több feszítőfa. Egy k hosszú körből tetszőleges él kihagyásával különböző feszítőfákat csinálhatunk, így esetünkben legfeljebb egy darab, három hosszú kör lehet. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha egy élet elhagyva már fát kapunk, tehát $n-1+1=n$ csúcsú a gráf.

13. **Mennyi az alábbi gráfban a minimális feszítőfa súlya? Hány különböző minimális feszítőfa van?**



Kruskal algoritmust kell használni, 17 lesz a végeredmény. A három egy súlyú élből kell kettőt választanunk, később pedig a három négy súlyú közül az egyiket nem választhatjuk, így kettő közül kell egyet választani. A választások függetlenek, így $3 \cdot 2 = 6$ minimális összsúlyú feszítőfa van.

14. **Egy teljes gráf ponthalmaza $x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_l$. Az (x_i, x_j) élek költsége (súlya) 1, az (y_i, y_j) éleké 2, az (x_i, y_j) éleké 3. Mennyibe kerül a legolcsóbb feszítőfa?**
A Kruskal algoritmus először az 1 súlyú élek közül fog választani, belőlük tud építeni egy $k-1$ elű fát. Utána a 2 súlyúak következnek, belőlük $l-1$-et lehet választani. A végén az x_i és y_j pontokon lesz két feszítőfa, ezeket muszály egy 3 súlyú éllel összekötni. Tehát $(k-1) \cdot 1 + (l-1) \cdot 2 + 3 = k + 2l$.

15. **Milyen n-ekre igaz, hogy egy n csúcsú teljes gráfban van Euler-kör illetve Euler-út?**
K_n-ben az összes fokszám $n-1$. Kör: az összes fokszámnak párosnak kell lennie, ezért $n-1$ páros, tehát n páratlan, vagyis $n = 2k+1, (k \in \mathbb{N})$. Út: az előző itt is igaz, viszont megengedhetünk két darab páratlan fokú pontot is. Ez viszont csak K_2 lehet, vagyis $n = 2k+1, (k \in \mathbb{N})$ és $n = 2$.

16. **Egy 12 fős társaságban mindenki legalább 6 embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsd be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait!**
Definiáljunk egy gráfot, amiben minden embernek egy csúcsot feleltetünk meg, és két csúcs akkor van összekötve, ha ismerik egymást. Ha ebben a gráfban találunk Hamilton-kört, akkor a kör mentén le tudjuk őket ültetni. 12 csúcsunk van és minden fokszám legalább 6, így a Dirac-tétel értelmében van Hamilton-kör a gráfban, tehát létezik ilyen leültetés.

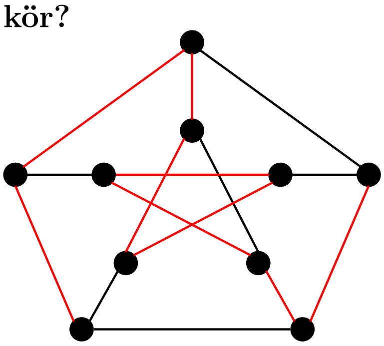
17. **Egy 20 fős társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsd be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré vagy úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait, vagy úgy, hogy senki se ismerje a szomszédait!**
Ha mindenki legalább $n/2$ embert ismer, akkor ez lehetséges ugyanúgy, mint az előző feladatban. Ha kevesebb, mint $n/2$-t, akkor vegyük az előbb definiált gráf komplementerét, és az itt talált Hamilton-kör pont egy olyan leültetésnek fog megfelelni, ahol senki nem ismeri a mellette lévőket. A komplementerben már teljesül a Dirac-tétel feltétele, így itt is létezik Hamilton-kör.

18. **Igazold, hogy ha egy $2k+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, akkor a gráfban van Hamilton-út!**
Vegyünk a gráfhoz egy pontot, ahonnan húzzunk éleket az összes eredeti pontba. Az új gráf csúcsainak száma $2k+2$, a fokszámok pedig eggyel növekedtek (az új pont foka $2k+1$), így mindegyik legalább $k+1$. A Dirac-tétel szerint ebben a

gráfban van Hamilton-kör, ami biztos átmegy az új csúcson is. Ha ezt a csúcsot az éleivel elhagyjuk, akkor a Hamilton-kör „maradéka” pont egy Hamilton-út lesz az eredeti gráfban.

19. **Létezik-e olyan 6 pontú és 11 illetve 12 élű gráf, melyben nincs Hamilton-kör?**
11 létezik, pl K_5-höz kapcsolva egy éllel egy csúcsot pont ilyet kapunk. 12 él esetén a gráfunk pont 3 éllel tartalmaz kevesebbet mint K_6. Ha tehát K_6-ból úgy hagyun kel 3 élet, hogy nem mind egy ponthoz kapcsolódik, akkor a fokszámok legfeljebb 2-vel csökkennek, vagyis minden pont foka legalább 3 lesz. Ekkor a Dirac-tétel értelmében van Hamilton-kör. Ha az elhagyott 3 él 1 pontra illeszkedett, akkor a fokszámok: $2, 4, 4, 4, 5, 5$. Az Ore-tétel miatt ebben az esetben is van Hamilton-kör.

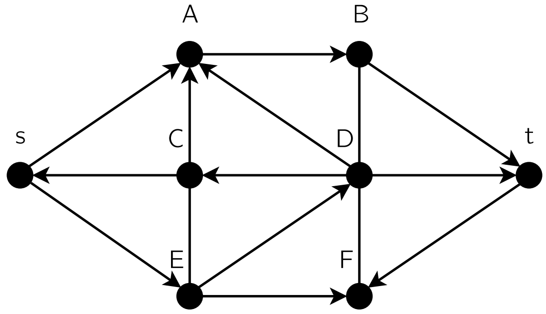
20. **Sir Galahad haragszik Merlinre, mert az véletlenül békává változtatta a lovát. Arthur király és Sir Lancelot Guinevere szerelméért állnak versenyben. Sir Lancelot gyávának nevezte Sir Robint. Arthur király és Sir Robin összevesztek azon, hogy nem tudtak megegyezni egy hegy magasságában. Le lehet-e őket ültetni a kerekasztal köré úgy, hogy senki se legyen haragban a szomszédjával? És ha Arthur és Sir Robin kibékülnek?**
Ezt nem rajzolnám le, a lényeg, hogy 3 ember is van, aki csak 2-vel nincs haragban, így ha definiálunk egy gráfot, amiben a csúcsok az emberek és akkor vezet köztük él ha ültethetők egymás mellé, akkor az előzőek szerint Hamilton-kört kell keresni, de 5 csúcsú a gráf, míg 3 darab másodfokú pont van, ami miatt egy Hamilton körben legalább 6 élnek kéne lennie. (Egy másodfokú pont mindkét élét be kell venni egy Hamilton-körbe.) Ha hozzáadjuk az élet, akkor lesz benne Hamilton kör, kis rajzolgatás után lehet találni.

21. **Van-e az ábrán látható Petersen-gráfban Hamilton-út? És Hamilton-kör?**

Egy Hamilton-utat pirossal berajzoltam. Hamilton-kör nincsen benne, csak a bizonyítás vázlatát írom le. Először vegyük észre, hogy a gráf „kifordítható”, vagyis a külső- és belső kör felcserélésével izomorf gráfokat kapunk, így nem kell külön kezelni sok esetet. Hogy nézne ki egy Hamilton-kör? 10 csúcsunk van és 15 élünk, így 5 él nem szerepel benne. Azt kell kitalálni, melyik ötöt nem vesszük be. Az összes pont foka 3, így mindegyikhez legfeljebb 1 élet lehet elhagyni. A szimmetria miatt megbetűzhetjük a pontokat, úgy érdemes rajzolgatni. Meg kell vizsgálni, azt az esetet, mikor a külső körről hagyunk el 2 élet, valamint azt is, amikor az összekötőkből hármat. Ki fog jönni, hogy sehogy sem lesz körünk.

22. **Milyen a teljes gráf szélességi bejárása?**
Egy csillag: ahonnan elkezdtük a bejárást, abból a pontból közvetlenül megy él

az összes többi pontba.

23. **Készítsük el az alábbi gráf szélességi bejárását!**



Könyv alapján meg lehet csinálni.