Algel VII. gyakorlat, 2015. március. 25.

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

Trükkösebb keresőfák

1. Építsünk piros-fekete fát a következő számokból: 7, 8, 2, 10, 5, 4
2. Építsünk 2-3 fát a következő elemekből, ebben a sorrendben: D, B, E, A, C, F, G! Ezután töröljük D-t és B-t!
3. **[pZH: 2012. április 25.]** Mekkora lehet egy olyan piros-fekete fa magassága, amiben 7 elemet tárolunk?
4. **[ZH: 2009. április 24.]** Egy 2-3 fa gyökerének három fia van, a benne szereplő két érték 40 és 50. Mennyi lehet a tárolt elemek minimális, illetve maximális száma, ha tudjuk, hogy csak pozitív egész számokat tárol a fa?
5. **[Vizsga: 2009. június 17.]** Az MSc-re jelentkezőknek a felvételit alkotó 3 témakör mindegyikéből lesz egy írásbeli pontszámuk (P_1, P_2, P_3), és keletkezik egy felvélteli pontszámuk is (FP). Tegyük fel, hogy a P_i-k 1 és 30 közötti egészek, míg az FP tetszőleges pozitív egész szám lehet. Adjon meg egy olyan adatszerkezetet, amivel a következő műveletek az adott időben végrehajthatóak (n a jelentkezők számát jelöli)!
BESZÚR(P_1, P_2, P_3, FP): az adott pontszámok beillesztése – $O(\log n)$
KERES(p): a pontosan p felvételi ponttal $(FP = p)$ rendelkező jelentkezők számát határozza meg – $O(\log n)$
KORLÁT(i, q): az írásbelin az i-edik témakörből legalább q pontot elért jelentkezők számát határozza meg – $O(1)$

---

6. (a) Lehet-e tetszőleges (adott) kulcshalmaz esetén olyan piros-fekete fát építeni, hogy az azonos szinten lévő elemek azonos színűek legyenek?
   (b) Van-e olyan piros-fekete fa, ami nem így néz ki?
7. Egy 2-3 fának 10^9 levele van. Mekkora a szintjeinek minimális, ill. maximális száma? És ha B_{20} fát használnánk?
8. **[ZH: 2007. április 27.]** Egy piros-fekete fában lehetséges-e, hogy a piros-fekete tulajdonság megsértése nélkül
   (a) néhány fekete csúcsot átváltoztathatunk pirosra?
   (b) valamelyik (csak egy) fekete csúcsot átváltoztathatjuk pirosra?

   (Mást nem változtatunk a fán.)
9. Az $[1, 178]$ intervallum összes egészei egy 2-3 fában helyezkednek el. Tudjuk, hogy a gyökérben két kulcs van, és ezek közül az első 17. Mi lehet a második? Miért?
10. **[ZH: 2014. március 31.]** Egy piros-fekete fában 13 elemet tárolunk. Minimálisan hány piros csúcs van a fában? (A teljes megoldáshoz be kell látni megfelelő k-ra, hogy lehet k piros, és azt is, hogy nem lehet $k - 1$ piros.)
11. **[ZH: 2009. április 24.]** Egy piros-feket fában jelölje x és y a gyökér két fiát. Tudjuk, hogy $fm(x) = fm(y)$, de az x csúcs két gyerekének különbözik a fekete magassága. Milyen színű lehet az y csúcs?
12. **[ZH: 2011. április 19.]** Adott $2^k - 1$ különböző szám, mindegyik az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazból, ezekből kell egy $O(k)$ mélységű bináris keresőfát készíteni. Adjon olyan algoritmust, amely ezt $O(n)$ lépésben megcsinálja!
13. Az S_1 és S_2 kulcshalmazokat kiegészített 2-3 fákban tároljuk. Ezek az eredeti 2-3 fától annyiban különböznek csak, hogy minden csúcsban nyilván van tartva az onnan induló részfa magassága.

Tudjuk továbbá, hogy az S_1-beli kulcsok mind kisebbek, mint az S_2-beliek. Javasoljunk hatékony algoritmust a két fa egyesítésére!

14. **[PZH: 2008. május 9.]** Vázolja a 2-3 fának (és műveleteinek) egy olyan módosítását, amiben továbbra is van KERES, BESZÚR, TÖRÖL, MIN, MAX művelet, és ezeken kívül van még RANG és K-ADIK művelet is, ahol RANG(x) azt adja vissza, hogy a tárolt elemek között az x a rendezés szerint hányadik elem, a K-ADIK(i) pedig, hogy a rendezés szerint a tárolt elemek közül melyik az i-edik. A módosítás során a felsorolt szokásos műveletek lépésszámának nagyságrendje ne változzon, és mindkét új művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$, ahol n a tárolt elemek száma.
15. **[Vizsga: 2003. március 31.]** Tervezzen adatstruktúrát a következő feltételekkel. Természetes számokat kell tárolni, egy szám többször is szerepelhet. A szükséges műveletek:
BESZÚR(i): i egy újabb példányát tároljuk
TÖRÖL(i): i egy példányát töröljük
MINDTÖRÖL(i): i összes példányát töröljük
DARAB(i): visszaadja, hogy hány példány van i-ből
ELEM(K): megmondja, a nagyság szerinti rendezésben a K-adik elem értékét.
Az adatstruktúra legyen olyan, hogy ha m-*féle* elemet tárolunk, akkor mindegyik művelet lépésigénye $O(\log m)$.
(Például ha a tárolt elemek $1, 1, 3, 3, 3, 8$, akkor DARAB$(1) = 2$, ELEM$(4) = 3$ és $m = 3$.)
16. **[ZH: 2003. március 31.]** Egy 2-3 fába egymás után 1000 új elemet illesztettünk be. Mutassa meg, hogy ha ennek során egyszer sem kellett csúcsot szétvágni, akkor a beillesztések sorozata előtt már legalább 2000 elemet tároltunk a fában.
17. **[ZH: 2004. március 29.]** Egy kezdetben üres 2-3 fába az $1, 2, \ldots, n$ számokat szúrtuk be ebben a sorrendben. Bizonyítsa be, hogy a keletkezett fában a harmadfokú csúcsok száma $O(\log n)$.

Piros-fekete fák

- minden nem levél(=belső) csúcsnak két fia van
- elemeket a belső csúcsokban tárolunk (levélben nem)
- teljesül a keresőfa-tulajdonság
- a fa minden csúcsa piros vagy fekete
- a gyökér fekete
- a levelek feketék
- piros csúcs mindkét gyereke fekete
- minden v csúcsra igaz, hogy az összes v-ből levélbe vezető úton ugyanannyi fekete csúcs van.

Tételek:

1. Egy piros-fekete fa minden v csúcsára teljesül, hogy $\frac{m(v)}{2} \leq fm(v) \leq m(v)$.
2. Egy piros-fekete fában az F_v részfa belső csúcsainak száma legalább $2^{fm(v)} - 1$.
3. Ha egy piros-fekete fában n elemet tárolunk, akkor a fa magassága legfeljebb $2\log(n + 1)$.

2-3 fák, B-fák

- az elemeket a levelekben tároljuk, balról jobbra növekvő sorrendben, egy levél egy elemet (rekordot) tartalmaz
- a belső csúcsokban csak kulcsokat és mutatókat tárolunk, minden csúcsnak legalább 2, legfeljebb 3 fia van (B_m-fáknál $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ ill. m, kivéve a gyökér, ahol a triviális esetet leszámítva legalább 2 fiúnak kell lenni)
- a fa levelei a gyökértől egyforma távolságra vannak

Tételek:

1. Ha egy 2-3 fának l szintje van, akkor a levelek száma legalább 2^{l-1}.
2. Ha egy 2-3 fában n elemet tárolunk, akkor a szintjeinek száma legfeljebb
$\log_2 n + 1$.
3. Ha egy B_m-fában n elemet tárolunk, akkor a szintjeinek száma legfeljebb $\frac{\log_2 n-1}{\log_2 \lceil \frac{m}{2} \rceil} + 2$.