

1. Gondolkozzunk el az NP -beliség, $coNP$ -beliség és P -beliség fogalmakon!
2. Lássuk be, hogy az alábbi problémák NP -beliek! Melyekről tudjuk megmondani, hogy $coNP$ -ben vannak? Melyekről, hogy P -ben?

- (a) $\pi_1 = \{(G, k) \mid G \text{ gráf kiszínezhető } k \text{ színnel}\}$
- (b) $\pi_2 = \{G \mid G \text{ irányítatlan gráfban van Euler-kör}\}$
- (c) $\pi_3 = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan gráfban van } k \text{ független pont}\}$

3. Bizonyítsuk be, hogy a következő probléma P -beli:

$$\pi = \left\{ G \mid \begin{array}{l} G \text{ gráf kiszínezhető a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy,} \\ \text{hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék} \end{array} \right\}$$

4. Tegyük fel, hogy van egy olyan F eljárásunk, ami egy input G gráfra és k számra 1 lépés alatt megmondja, hogy van-e G -ben legalább k méretű független ponthalmaz. Tervezzünk olyan algoritmust, ami polinomidőben

- (a) meghatározza $\alpha(G)$ -t!
- (b) talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt!

5. Lássuk be, hogy az alábbi problémák NP -beliek! Melyekről tudjuk megmondani, hogy $coNP$ -ben vannak? Melyekről, hogy P -ben?

- (a) $\pi_1 = \{(G, k) \mid G \text{ páros gráfban van teljes párosítás}\}$
- (b) $\pi_2 = \{(G, k) \mid G \text{ páros gráfban van } k \text{ élből álló párosítás}\}$
- (c) $\pi_3 = \{G \mid G \text{ irányítatlan gráf, van benne pontosan } 100 \text{ élből álló kör}\}$
- (d) $\pi_4 = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan gráf, van benne legalább } k \text{ élből álló kör}\}$
- (e) $\pi_5 = \left\{ (s_1, s_2, \dots, s_n, b) \mid \forall i \ s_i, b \in \mathbb{Z}^+; \exists j_1, \dots, j_k \ (1 \leq k \leq n) : \sum_{l=1}^k s_{j_l} = b \right\}$

6. A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazzuk meg a feladathoz tartozó eldöntési problémát, és bizonyítsuk be, hogy NP -beli!
7. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! (Vagyis input: G és k ; output: igen/nem). Hogy tudnánk ennek segítségével polinom időben meghatározni $\chi(G)$ -t?
8. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! A fentiek értelmében azt is megtudhatjuk polinom időben, hogy mennyi $\chi(G)$. Hogyan tudnánk kiszínezni polinom időben a gráfot $\chi(G)$ színnel?
9. Legyen a π döntési probléma inputja egy G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha G síkbarajzolható. Mutassuk meg, hogy $\pi \in NP \cap coNP$.

Hasznos tudnivalók

- Eldöntési problémákról beszélünk!
- $P \subseteq NP$, $P \subseteq coNP$. Tehát ha valami P -beli, akkor **biztos**, hogy NP -beli és $coNP$ -beli is!!!
- **P -beliség bizonyítása**: adunk egy polinom idejű algoritmust. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát. Nem fontos a hatékonyság, n^{100} is polinomiális!
- **NP -beliség bizonyítása**: tanú mutatása, tanú mérete polinomiális, ellenőrzés polinomiális. Nem kell algoritmus a tanú előállítására!!! A tanú lehet pofátlanul egyszerű. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát.