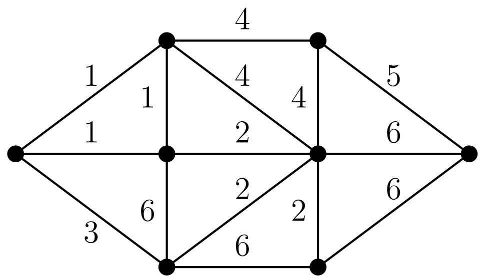
Algel XI. gyakorlat, 2015. április. 22.
Gráfokat feszítünk, olcsón

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. Mennyi az alábbi gráfban a minimális feszítőfa súlya? (Gyakorlásképpen mindhárom módszerrel – Prim, Kruskal, Borůvka – csináljuk meg a feszítőfa-keresést!)



2. Egy teljes gráf ponthalmaza $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$. Az (x_i, x_j) élek költsége (súlya) 1, az (y_i, y_j) éleké 2, az (x_i, y_j) éleké 3. Mennyibe kerül a legolcsóbb feszítőfa?

3. **[Vizsga: 2005. június 23.]** Irányítatlan gráf tárolására adjon meg egy adatszerkezetet az alábbi műveletekkel:
ÚJCSÚCS(v): a gráfhoz hozzáad egy új csúcsot;
ÚJÉL(u, v): a már létező u és v csúcsok közé felvesz egy élet;
VANÚT(u, v): *igen* értéket ad vissza, ha vezet az u és v csúcsok között út, egyébként pedig *nem* értéket.
Ha a tárolt gráfnak n csúcsa van, akkor mindhárom művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$.

4. **[Vizsga: 2010. május 27.]** Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan, összefüggő, súlyozott gráf az éllistájával valamint egy $f \in E$ él. Tegyük fel, hogy a gráfban minden él súlya különböző. Adjon $O(|V| + |E|)$ lépésszámú algoritmust annak eldöntésére, hogy van-e olyan minimális feszítőfa G-ben, amely tartalmazza az f élet!

---

5. **[Vizsga: 2008. június 3.]** Éllistával adott a $G = (V, E)$ egyszerű, összefüggő gráf. A gráf élei súlyozottak, a súlyfüggvény $c : E \to \{-1, 1\}$. Adjon algoritmust, ami G-ben $O(|V|+|E|)$ lépésben meghatározza, hogy mennyi a minimális súlya egy olyan részgráfnak, ami G minden pontját tartalmazza és összefüggő.

6. **[Vizsga: 2007. június 5.]** Útépítéskor a környéken sok helyen felszedték a járdát. Az építők 1-től n-ig megszámozták a fontos pontokat (kapualj, útkereszteződés, stb.). A környék állapotát két $n \times n$ táblázat írja le. A J táblázatban $J[i, j] = 1$, ha az i és j pontok az utcán szomszédosak és megmaradt az ezeket összekötő részen a járda, egyébként az érték 0. A P táblázat az ideiglenesen elhelyezhető pallókat írja le: ha az i és j pontok összeköthetőek egy pallóval, akkor $P[i, j]$ ennek a pallónak a költsége. Amennyiben a két pont nem köthető össze egy pallóval, akkor a táblázatban $*$ szerepel. (Minden palló pontosan két pontot érint.) Szeretnénk biztosítani, hogy mindenhonnan mindenhova el tudjunk jutni (hol járdán hol pallón haladva). Az építők célja, hogy úgy válasszák meg a pallók helyét, hogy minél kevesebb pallót kelljen használniuk, és ezen belül a pallók értékeinek összege minimális legyen. Írjon le egy algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben javasol egy ilyen elhelyezést. (Egy pontra tetszőlegesen sok palló illeszkedhet, és a gyalogosok az egy pontra illeszkedő pallók bármelyikéről bármelyikére át tudnak lépni.)

7. Mátrixával adott egy G irányítatlan súlyozott gráf. Adott még a G-nek egy F minimális súlyú feszítőfája, és az F-nek egy f éle. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy az f él súlyát meddig lehet úgy felemelni, hogy az F a gráf minimális feszítőfája maradjon.

8. **[Vizsga: 2008. május 27.]** Éllistával adott egy egyszerű, összefüggő, súlyozott irányítatlan $G = (V, E)$ gráf amiben nincs két egyforma súlyú él. Adjon $O(|V| \cdot |E|)$ lépésszámú algoritmust, ami megadja a gráfban a második legkisebb súlyú feszítőfát.

9. **[Vizsga: 2012. január 5.]** (*kicsit egyszerűsítve*) Éllistával adott egy G összefüggő gráf, melynek élei súlyozottak (lehetnek negatív súlyok is). Szeretnénk a gráf pontjait két csoportra felosztani – egy X és egy Y ponthalmazra – úgy, hogy a legkisebb súlyú olyan él, aminek egyik végpontja X-beli, másik pedig Y-beli, a lehető legnagyobb súlyú legyen. Adj $O(e \log e)$ lépésszámú algoritmust egy ilyen felosztás megtalálására!

10. Legyen adva egy (egyszerű, irányítatlan, összefüggő) n csúcsú G gráf éllistával, az élek súlyozásával együtt. Tegyük fel, hogy a G-ből a v_1 csúcs, valamint a v_1-re illeszkedő élek elhagyásával keletkező G' gráf még mindig összefüggő, és adott a G' egy minimális költségű feszítőfája. Adjunk $O(n \log n)$ futási idejű algoritmust a G gráf egy minimális költségű feszítőfájának elkészítésére!

11. Hány éle van az n pontú egyszerű összefüggő gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?

12. Éllistával adott egy összefüggő, egyszerű, irányítatlan, n csúcsú, e élű G gráf csupa különböző élsúllyal. Adjunk egy olyan $O(e)$ költségű algoritmust, ami a G gráf egy minimális feszítőfájának legalább $\frac{2}{3}n$ élét előállítja! (Azaz egy olyan élhalmazt keresünk, ami biztosan része egy minimális költségű feszítőfának.)

13. Bizonyítsuk be, hogy a piros-kék algoritmus akkor is helyesen működik, ha egy feszítőfa költségét az élsúlyok összege helyett az élsúlyok maximumával definiáljuk! (Ez az állítás vizsgán bizonyítás nélkül is felhasználható, ha úgy adódik.)