Algel XIII. gyakorlat, 2014. május. 5.
$P?NP$, part 2

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

Hasznos tudnivalók

- **NP-teljesség bizonyítása** π_{uj} problémára:
  1. π_{uj} NP-beliségének bizonyítása.
  2. π_{uj} NP-nehézségének bizonyítása:
     (a) Találunk egy vele kapcsolatba hozható problémát, ami ismerten NP-teljes, ez legyen π_{ismert}.
     (b) Bemutatunk egy $\pi_{ismert} \prec \pi_{uj}$ Karp-redukciót, az irány **eszméletlenül fontos**! Azaz van egy π_{ismert}-beli kérdésünk (**nem az aktuális probléma**, hanem egy ismerten nehéz!), azt átalakíthatjuk, és átalakítva bedobjuk a π_{uj}-t (az egyelőre ismeretlen nehézségű problémát) megoldó fekete dobozba, és ez a válasz lesz az eredeti kérdésünkre is a válasz! Tehát az átalakítást kell megadni, arra jár a pont.
     (c) Bizonyítjuk a Karp-redukció helyességét. Azaz, ha f az átalakítás: $x \in \pi_{ismert} \Leftrightarrow f(x) \in \pi_{uj}$ a bizonyítandó. Figyelem! **Két bizonyítás**, akkor és csak akkor, „$\Leftrightarrow$”!
     (d) Belátjuk, hogy f polinom időben elvégezhető.
- Tanult NP-teljes problémák: SAT, 3SZIN, kSZIN, MAXFTL, MAXKLIKK, H-kör, H-út, RÉSZGRÁF-IZO, Részhalmazösszeg (RH), PARTÍCIÓ, HÁTIZSÁK.

Feladatok

1. Gondolkozzunk el az NP-nehézség és NP-teljesség fogalmakon!
2. Adjunk Karp-redukciót a 3-SZÍN problémáról a 4-SZÍN problémára!
3. **[Vizsga: 2007. május 29.]** A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet és vagy lássa be róla, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes.
4. Bizonyítsuk be a következő problémáról, hogy NP-teljes, vagy azt, hogy P-beli!

$$L = \{G \mid G \text{ irányítatlan teljes gráf, amiben van Hamilton-kör}\}$$

5. **[Vizsga: 2008. június 10.]** Tegyük fel, hogy $P \neq NP$. Az alábbi feltételek közül melyikből következik és melyikből nem következik hogy az X eldöntési probléma nem P-beli?
   (a) Egy NP-teljes Y problémára X Karp-redukálható.
   (b) Egy NP-teljes Y probléma Karp-redukálható X-re.
   (c) az X probléma NP-beli.
6. **[Vizsga: 2013. június 6.]** Létezik-e olyan X eldöntési probléma, amire $X \notin NP$ és $X \prec SAT$ egyszerre fennáll?
7. **[Vizsga: 2013. június 13.]** Lehetséges-e, hogy valamely X eldöntési problémára $X \in NP$ és $HAM \prec X$ egyszerre fennáll?

---

8. Mi az alábbi problémák bonyolultsága, ha az input egy $G(V, E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$)? Természetesen bizonyítsuk is be!
   (a) Van-e G-ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?
   (b) Van-e G-ben legalább $n/100$ hosszúságú kör?

(c) Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?

(d) Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3?

9. **[Vizsga: 2011. december 22.]** Igazold, hogy a következő eldöntési probléma P-ben van, vagy azt, hogy NP-teljes ($e(G)$ a gráf éleinek, $v(G)$ a gráf pontjainak számát jelöli):
Input: G gráf, melyre teljesül, hogy $e(G) \leq 3v(G)$
Kérdés: Igaz-e, hogy G kiszínezhető 3 színnel?

10. Bizonyítsuk be, hogy a leghosszabb út meghatározása egy irányított, élsúlyozott G gráfban NP-teljes! (Pontosabban az ehhez tartozó eldöntési probléma.) Másképpen: bizonyítsuk be, hogy

$$L = \{(G, k) \mid G \text{ irányított, élsúlyozott gráf, van benne legalább } k \text{ súlyú út}\}$$

NP-teljes!

11. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv P-ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:

$$\{(G, k) \mid G \text{ egy síkgráf, amiben van } k \text{ pontú klikk}\}$$

Mutassa meg, hogy ez a nyelv NP-teljes, vagy mutassa meg, hogy a nyelv P-ben van.

12. **[Vizsga: 2009. május 28.]** P-beli vagy NP-teljes az alábbi probléma? Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és az a kérdés, hogy van-e olyan C kör a gráfban, melyhez minden $v \notin C$ csúcsból vezet él.

13. **[Vizsga: 2010. május 27.]** Az árvíz több helyen fenyegeti a gátakat, tudjuk, hogy n kritikus hely van. Ezek közül az i-ediknél a gát megfelelő megerősítéséhez h_i darab homokzsák kell. Ha az erősítés nem történik meg (vagy csak kevesebb homokzsákkal), akkor az i-edik helyen k_i kárt okoz a folyó. Adottak a h_i és k_i pozitív számok, továbbá a gátak megerősítéséhez összesen rendelkezésre álló homokzsákok Z száma ($Z > 0$ egész). Azt szeretnénk meghatározni, hogy ennyi homokzsákkal hogyan tudjuk a kárt minimalizálni, ha feltesszük, hogy a meg nem erősített pontokon keletkező károk összeadódnak.

    Fogalmazza meg a feladatot eldöntési problémaként és vagy adjon rá polinomiális algoritmust vagy igazolja, hogy a probléma NP-teljes!

14. **[Vizsga: 2012. december 20.]** Tegyük fel, hogy $NP \subseteq P$. Következik-e ebből, hogy az alábbi eldöntési feladat $coNP$-beli?
Input: G irányítatlan gráf
Kérdés: Igaz-e, hogy G élei kiszínezhetők 2014 színnel úgy, hogy az egy csúcsra illeszkedő élek színei mind különbözőek?

15. **[Vizsga: 2010. május 27.]** Az X probléma bemenete egy binárisan felírt $N > 0$ egész szám, és akkor lesz a válasz `igen`, ha N nem 2-hatvány. Az Y probléma bemenete egy G egyszerű gráf, és akkor lesz a válasz `igen`, ha G csúcsainak színezéséhez 3-nál több szín kell. Ha feltesszük, hogy $P \neq NP$, akkor van-e $X \prec Y$, illetve $Y \prec X$ Karp-redukció?

16. **[Vizsga: 2010. június 17.]** Az X problémában adott egy G dag és egy k pozitív egész szám, a kérdés, hogy van-e G-ben legalább k élű út. Igaz-e, hogy $X \prec$ 3SZÍN, illetve, hogy 3SZÍN $\prec X$?

17. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Igazolja, hogy ha a 3SZÍN nyelv benne van $coNP$-ben, akkor $NP = coNP$.

18. **[Vizsga: 2013. május 30.]** Igaz-e, hogy ha az X eldöntési problémáról be tudnánk látni, hogy $X \in NP \setminus P$ (vagyis X NP-ben van, de nincs P-ben), akkor 3-SZÍN$\notin P$?