Algel I. gyakorlat, 2014. február 10.

Barátkozás a tárggyal és egymással

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. Tegyük fel, hogy van egy számítógépes programunk, ami egy k méretű feladaton a jelenlegi gépünkön 1 nap alatt fut le. Beszereztünk egy százszor gyorsabb számítógépet. Ugyanazon programmal mekkora feladatot lehet az új gépen egy nap alatt megoldani, ha a program lépésszáma n méretű feladat esetén (a) n-nel, (b) n^2-tel, (c) n^3-bel, illetve (d) 2^n-nel arányos?

2. Bizonyítsuk be, hogy

   (a) $\log_2 f(n) = \Theta(\log_{100} f(n)) \quad (f(n) > 0)$,

   (b) $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0 \quad (a_k \neq 0) \quad \Rightarrow \quad f(n) = \Theta(n^k)$,

   (c) $2^{n+1} = O(2^n)$, de $2^{2n} \neq O(2^n)$,

   (d) $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n)) \quad (f(n), g(n) > 0)$!

3. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Egy $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy

   (a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma $|x|^3$?

   (b) minden x bemeneten legfeljebb $2007|x|$ lépést használ? (Szokás szerint $|x|$ az x bemenet hosszát jelöli.)

4. **[ZH: 2010. április 19.]** Legyen $f_1(n) = n^{3\log n}$ és $f_2(n) = 2010 \cdot 4^{\log n \cdot \log n}$. Igaz-e, hogy $f_1 = O(f_2)$, illetve, hogy $f_2 = O(f_1)$?

5. Jelöljük $T(n)$-nel egy algoritmus legnagyobb lehetséges lépésszámát az n méretű inputokon. Tudjuk, hogy $T(n) \leq 10$, ha $n \leq 5$ és $T(n) \leq T(n-1) + n/3$, ha $n > 5$. Ekkor mit tudunk mondani $T(n) = O(n)$, $T(n) = O(n^2)$ és $T(n) = O(n^3)$ egyenlőségek helyességéről?

6. **[ZH: 2011. március 28.]** Egy problémára két algoritmusunk van.

   Az $\mathcal{A}$ algoritmus az $n \geq 2$ méretű problémából 10 lépéssel 2 db $n-1$ méretűt készít és ezeket oldja meg rekurzívan.

   A $\mathcal{B}$ az $n \geq 2$ problémából 3 lépéssel 4 db $n-1$ méretűt készít és ezeket oldja meg rekurzívan. Az $n = 1$ esetben mindkét eljárás 1 lépést használ.

   Melyik algoritmus lesz nagy n értékekre gyorsabb?

---

7. Igaz-e a következő állítás: Minden olyan borgnak, aki ebben a szobában van, piros fülei vannak.

8. Mi a tagadása az alábbi állításoknak? Igazak ezek az állítások?

   (a) Minden hétfőn van algel gyakorlat.

   (b) Minden olyan hallgató, aki jár algel gyakorlatra, átmegy a vizsgán.

   (c) Minden olyan 17 lábú zsiráf, aki jár algel gyakorlatra, az átmegy a vizsgán.

9. Fogalmazzuk meg az alábbi állítás tagadását úgy, hogy ne szerepeljen benne tagadószó!
   „Minden asszony életében van olyan pillanat, hogy szeretne olyat tenni, ami nem szabad."

10. Van két állítás, p és q. Tudjuk, hogy ha p igaz, akkor q is igaz. Következik-e ebből, hogy ha q nem igaz, akkor p sem igaz?

11. Tudjuk, hogy minden hömpörő surjancs. Mondjuk meg minden alábbi állításra, hogy biztosan igaz, lehetséges, vagy biztosan hamis!

    (a) Tudjuk valamiről, hogy nem hömpörő. Azt állítom, hogy ez surjancs.

    (b) Tudjuk valamiről, hogy hömpörő. Azt állítom, hogy ez nem surjancs.

(c) Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez hömpörő.
(d) Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.
(e) Tudjuk valamiről, hogy surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.

---

12. Igaz-e, hogy

    (a) ha $f = O(g)$ és $g = O(h)$, akkor $f = O(h)$;

    (b) ha $f = \Omega(g)$ és $g = \Omega(h)$, akkor $f = \Omega(h)$?

13. Az alábbi függvényeket rendezzük olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = 8n^{2.5}, \quad f_2(n) = 5\sqrt{n} + 1000n, \quad f_3(n) = 2^{\log^2 n}, \quad f_4(n) = 2008n^2 \log n$$

14. Az $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n^2)$. Lehetséges-e, hogy

    (a) $\forall n$ hosszú bemeneten $O(n)$ lépést használ?

    (b) $\exists x$, hogy az x bemeneten az algoritmus lépésszáma $10|x|^2 \log|x| - 800$ (ahol $|x|$ az x bemenet hosszát jelöli)?

15. Adjunk O becslést a következő függvényekre:

    (a) $(n^2 + 8)(n + 1)$

    (b) $(n \log_2 n + n^2)(n^3 + 2)$

    (c) $(n^3 + n^2 \log_2 n)(\log_2 n + 1) + (17 \log_2 n + 19)(n^3 + 2)$

    (d) $(n! + 2^n)(n^3 + \log_2(n^2 + 1))$

    (e) $(2^n + n^2)(n^3 + 3^n)$

    (f) $(n^n + n2^n + 5^n)(n! + 5^n)$

16. **[Vizsga: 2007. június 19.]** Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = 2^{100n} - 2^{50n}, \quad f_2(n) = 2007n^3, \quad f_3(n) = 3^{3n}$$

17. **[Vizsga: 2007. június 5.]** Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n = 2k > 4$ páros számra $L(2k) \leq L(2k - 2) + 1$ teljesül, és hogy $L(4) = 10$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n)$?

18. Jelöljük $T(n)$-nel egy algoritmus legnagyobb lehetséges lépésszámát az n méretű inputokon. Tudjuk, hogy $T(n) \leq 10$, ha $n \leq 5$ és $T(n) \leq T(n-1) + n/3$, ha $n > 5$. Ekkor mit tudunk mondani $T(n) = O(n)$, $T(n) = O(n^2)$ és $T(n) = O(n^3)$ egyenlőségek helyességéről? (Most szépen kiszámolva!)

19. **[PZH: 2011. április 22.]** Egy problémára két algoritmusunk van.

    Az $\mathcal{A}$ algoritmus az $n \geq 2$ méretű problémából 5 lépéssel 2 db legfeljebb $n/2$ méretűt készít és ezeket oldja meg rekurzívan.

    A $\mathcal{B}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy lépésszáma az n méretű problémákon $O(n^2)$.

    Ha ennyiből lehetséges, határozza meg, melyik algoritmus lesz nagy n értékekre gyorsabb! Ha ennyi információból még nem következik, hogy $\mathcal{A}$ vagy $\mathcal{B}$ lesz a gyorsabb, akkor indokolja meg, miért nem!

20. **[PZH: 2012. április 25.]** Tudjuk, hogy az $f(n), g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényekre igaz, hogy $f(n) = O(g(n))$, de $f(n) \neq \Theta(g(n))$. Lehetséges-e, hogy $f(n) + 2012 \cdot n^{\log n} = \Theta(n \log n + g(n))$?