Algel VI. gyakorlat

Még rendezünk, aztán kersünk, fázunk

2013. március 18.

Piros-fekete fák

- minden nem levél(=belső) csúcsnak két fia van
- elemeket a belső csúcsokban tárolunk (levélben nem)
- teljesül a keresőfa-tulajdonság
- a fa minden csúcsa piros vagy fekete
- a gyökér fekete
- a levelek feketék
- piros csúcs mindkét gyereke fekete
- minden v csúcsra igaz, hogy az összes v-ből levélbe vezető úton ugyanannyi fekete csúcs van.

Tételek:

1. Egy piros-fekete fa minden v csúcsára teljesül, hogy
$$\frac{m(v)}{2} \leq fm(v) \leq m(v).$$
2. Egy piros-fekete fában az F_v részfa belső csúcsainak száma legalább $2^{fm(v)} - 1$.
3. Ha egy piros-fekete fában n elemet tárolunk, akkor a fa magassága legfeljebb $2\log(n+1)$.

Feladatok

1. Rendezzük a következő számsorozatot ládarendezéssel, ha tudjuk, hogy 0 és 10 közötti egész számok fordulhatnak csak elő!
7,8,4,5,5,4,5,0,3,4,7,5
2. Rendezzük a következő láncokat a radix rendezés segítségével: $abc, acb, bca, bbc, acc, bac, baa$!
3. Építsünk a naiv algoritmussal keresőfát a következő elemekből (a rendezés ABC szerint történik): D, B, E, A, C, F, majd töröljük a következő elemeket: F, D!
4. Építsünk piros-fekete fát a következő számokból: 7, 8, 2, 10, 5, 4. Járjuk be a fát pre-, in-, és postorder módon!
5. **[Vizsga: 2007. június 5.]** Adott egy n csúcsú és egy k csúcsú piros-fekete fa. A két fában tárolt összes elemből $O(n+k)$ lépésben készítsen rendezett tömböt.
6. **[pZH: 2012. április 25.]** Mekkora lehet egy olyan piros-fekete fa magassága, amiben 7 elemet tárolunk?

---

7. Vázoljunk egy $O(n)$ időigényű algoritmust (az időkorlát bizonyításával együtt) n olyan egész számból álló sorozat rendezésére, melynek elemei az
   (a) $\{1, \ldots, 3n\}$ tartományba esnek!
   (b) $\{1, \ldots, n^7 - 1\}$ tartományba esnek!
8. **[ZH: 2004. március 29.]** Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk. Lehetséges-e, hogy egy $KERES(x)$ hívás során a keresési út mentén a $20, 18, 3, 15, 5, 8, 9$ kulcsokat látjuk ebben a sorrendben? Ha nem lehetséges, indokolja meg miért nem, ha pedig lehetséges, határozza meg az összes olyan x egész számot, amire ez megtörténhet.

9. **[ZH: 2009. április 24.]** Egy bináris fa csúcsai 0 és 9 közötti egész számokkal vannak megcímkézve. Az inorder bejárás során a címkék sorrendje: 9, 3, 1, 0, 4, 2, 7, 6, 8, 5, a postorder bejárásnál pedig 9, 1, 4, 0, 3, x, 7, 5, y, 2. Mi lehet az x és mi az y?

10. (a) Lehet-e tetszőleges (adott) kulcshalmaz esetén olyan piros-fekete fát építeni, hogy az azonos szinten lévő elemek azonos színűek legyenek?

    (b) Van-e olyan piros-fekete fa, ami nem így néz ki?

11. **[ZH: 2007. április 27.]** Egy piros-fekete fában lehetséges-e, hogy a piros-fekete tulajdonság megsértése nélkül

    (a) néhány fekete csúcsot átváltoztathatunk pirosra?

    (b) valamelyik (csak egy) fekete csúcsot átváltoztathatjuk pirosra?

    (Mást nem változtatunk a fán.)

12. **[ZH: 2011. április 19.]** Adott $2^k - 1$ különböző szám, mindegyik az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazból, ezekből kell egy $O(k)$ mélységű bináris keresőfát készíteni. Adjon olyan algoritmust, amely ezt $O(n)$ lépésben megcsinálja!

13. **[Vizsga: 2009. május 28.]** Adott egy n csúcsú bináris keresőfa. Ennek minden v csúcsára meg akarjuk határozni, hogy a v gyökerű részfában hány darab v-nél kisebb elem van tárolva. Adjon algoritmust, ami ezt a feladatot $O(n)$ lépésben megoldja!

14. **[ZH: 2009. április 24.]** Egy piros-feket fában jelölje x és y a gyökér két fiát. Tudjuk, hogy $fm(x) = fm(y)$, de az x csúcs két gyerekének különbözik a fekete magassága. Milyen színű lehet az y csúcs?

15. Egy bináris keresőfa csúcsait egy, a gyökértől egy levélig menő út szerint három osztályba soroljuk: B az úttól balra levő, U az útra eső, J pedig az úttól jobbra levő csúcsok halmazát jelöli. Igaz-e mindig, hogy minden B-beli csúcs kulcsa kisebb tetszőleges U-beli csúcs kulcsánál, és minden U-belis csúcs kulcsa kisebb tetszőleges J-beli csúcs kulcsánál?

16. A 4 elemű I abc felett adott két szó: $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ és $y = y_1 y_2 \ldots y_k$, ahol $1 \leq k \leq n$ és $\forall i, j : x_i, y_j \in I$. Keressük az x szóban az olyan részszavakat, amelyek anagrammái y-nak, azaz az olyan i indexeket, hogy az $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}$ betűk megfelelő sorrendbe rakva az y szót adják. Adjunk algoritmust, ami x-ben az összes ilyen i helyet $O(n)$ lépésben meghatározza!

17. Adott n pont a síkon, melyek páronként mindkét koordinátájukban különböznek. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy bináris fa létezik, melynek csúcsai az adott n pont, és az első koordináta szerint a keresőfa tulajdonsággal, a második szerint a kupac tulajdonsággal rendelkezik! (A kupac tulajdonságba most nem értjük bele, hogy a fa teljes bináris fa legyen.)

18. Adott egy $n = 2^k - 1$ pontú teljes bináris keresőfa. A fában tárolt elemek egészek az $I = [1, 2^k]$ intervallumból, és egy szám legfeljebb egyszer fordul elő a fában. Utóbbi feltétel szerint pontosan egy olyan i egész szám van 1 és 2^k között, amely nincs a fában. Adjunk $O(\log n)$ lépésszámú algoritmust i meghatározására!

19. Egy fában az x csúcs *súlya* legyen x leszármazottainak száma. Egy bináris fát szigorúan binárisnak mondunk, ha a levelek kivételével minden csúcsnak pontosan 2 fia van. Tegyük fel, hogy egy szigorúan bináris fa minden x csúcsára fennáll, hogy

    $$\frac{1}{2} < \frac{s\acute{u}ly(bal(x))}{s\acute{u}ly(jobb(x))} < 2.$$

    Bizonyítsuk be, hogy ez csakis egy teljes fa lehet, azaz ha k szintje van, akkor a csúcsok száma $2^k - 1$. *(Ez nem kifejezetten keresőfázós feladat, de úgy általában érdekes.)*