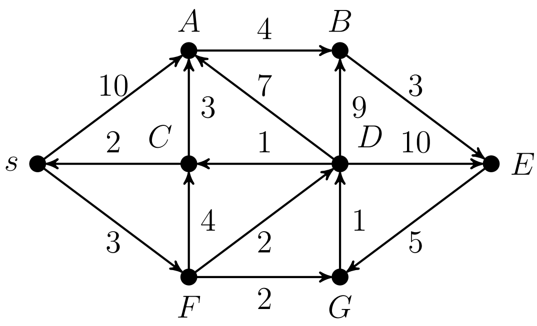
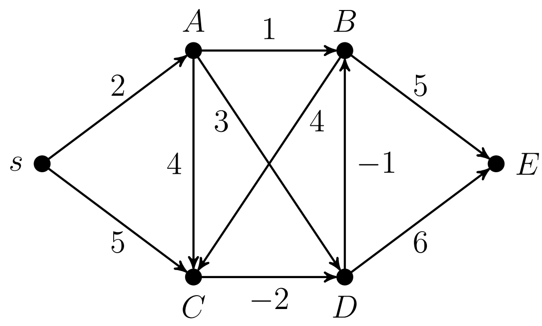
Algel III. gyakorlat

Utak, párosítások

2013. február 25.

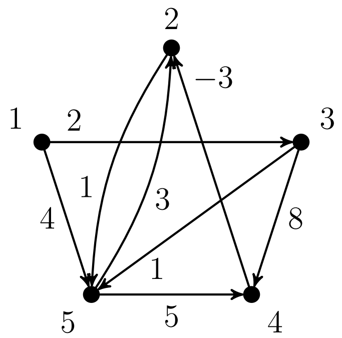
1. Határozzuk meg a baloldali gráfban Dijkstra-algoritmussal a legrövidebb s-ből induló utakat a többi csúcsba, nyomon követve az algoritmust!





2. Határozzuk meg a fenti jobb oldali gráfban Bellmann-Ford algoritmussal a legrövidebb s-ből induló utakat a többi csúcsba, nyomon követve az algoritmust!

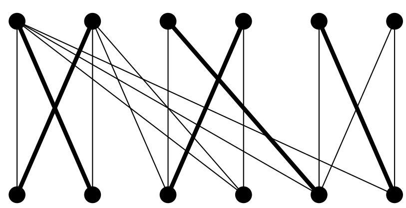
3. **[Vizsga: 2009. június 4.]** Az alábbi gráfon a Floyd-algoritmust futtatjuk. Az algoritmus során (a 4. javítási menet végén) az F_4 tartalmazza az ismert úthosszakat.



$$F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 10 & 3 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 5 & 0 & 8 & 1 \\ \infty & -3 & \infty & 0 & -2 \\ \infty & 2 & \infty & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Hogyan változik a táblázat amikor minden csúcspárra újra elvégezzük a frissítést?

4. Egészítsük ki maximális párosítássá a megadott párosítást a javítóutas módszerrel az alábbi páros gráfban!



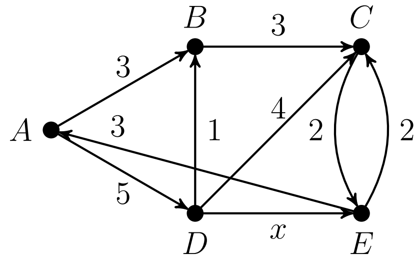
---

5. Hogy néz ki egy irányítatlan teljes gráf szélességi bejárása?

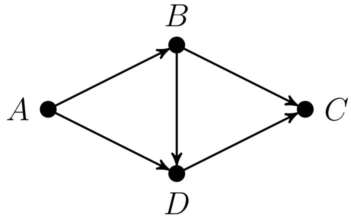
6. Éllistával adott a súlyozott élű $G(V, E)$ gráf. Tegyük fel, hogy az élek súlyai az $1, 2, 3$ számok közül valók. Javasoljunk $O(n + e)$ költségű algoritmust az $s \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának meghatározására!

7. Legfeljebb hány komponensből állhat egy irányított gráf szélességi bejárása során keletkező erdő?

8. **[ZH: 2009. április 24.]** Dijsktra-algoritmussal határozza meg az alábbi gráfban az A pontból az összes többi pontba menő legrövidebb utak hosszát az x pozitív valós paraméter függvényében. Minden lépésnél írja fel a távolságokat tartalmazó D tömb állapotát és a KÉSZ halmaz elemeit.



9. Határozzuk meg a jobb oldali gráfban az élsúlyokat úgy, hogy a Dijkstra algoritmus rossz eredményt adjon!



10. Adjuk meg az összes olyan minimális élszámú irányított gráfot (élsúlyokkal együtt), amely(ek)re az alábbi táblázat a Dijkstra algoritmusban szereplő $D[\,]$ tömb változásait mutathatja. Adjuk meg a legrövidebb utakat tartalmazó $P[\,]$ tömb állapotait is!

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0	2	6	∞	∞	7
0	2	5	9	∞	6
0	2	5	6	9	6
0	2	5	6	8	6
0	2	5	6	7	6

11. **[ZH: 2009. április 24.]** Egy kezdő autóvezető a városban való közlekedése során szeretne gyakorlatának megfelelő útvonalat választani. Az úthálózat egy irányítatlan gráfként van megadva, a csúcsok a kereszteződések, az élek az utak, a csúcsoknál adott, hogy nehéz-e számára a kereszteződés. (Az hogy nehéz, a kereszteződés tulajdonsága, nem azon múlik, merről érkezik oda és és merre akar rajta áthaladni.) Írjon le egy algoritmust, amivel meg lehet határozni, hogy az autós az egyik adott csúcsnál levő otthonából mely csúcsokba tud autóval úgy eljutni, hogy útja során két nehéz csúcs soha nem jön közvetlenül egymás után. Az algoritmus lépésszáma éllistás megadás esetén legyen $O(n+e)$, ahol n a csúcsok és e az élek száma.

12. Egy G gráfban pontosan egy él súlya negatív, és nincs a gráfban negatív összsúlyú irányított kör. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust az $s \in V(G)$ pontból az összes többi pontba vezető legrövidebb utak meghatározására!

13. **[ZH: 2007. április 27.]** Kutyasétáltatáskor egy parkban egy gazda rögzített, egyenes szakaszokból álló útvonalon halad, aminek töréspontjai $t_1, \ldots, t_n$, a bejáratot jelölje t_0, a kijáratot t_{n+1}. A kutyája szabadon szaladgál, de a t_i pontokban találkozik a gazdájával. A t_i és t_{i+1} pontokban való találkozás között a kutya szeretne egy fát is meglátogatni (minden $i = 0, 1, \ldots, n$ esetén legfeljebb egyet-egyet). Legyenek adottak az $s(t_i, t_{i+1})$ távolságok $(0 \leq i \leq n)$, valamint minden fának az összes t_i ponttól vett távolsága. Tegyük fel, hogy két találkozás között a kutya legfeljebb kétszer akkora távolságot tud megtenni, mint a gazda. Adjon algoritmust, ami segít a kutyának eldönteni, hogy mikor melyik fát látogassa meg ha a kutya célja, hogy minél több fánál járjon. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n^2 f + nf^2)$, ahol f a parkban levő fák számát jelöli.

14. Legyen $G = (V, E)$ mátrixszal adott n pontú, súlyozott élű irányított gráf! Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört, továbbá azt, hogy a G-beli egyszerű irányított utak legfeljebb 25 élből állnak. Javasoljunk $O(n^2)$ költségű módszert az $1 \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására!

15. Adott éllistával egy n pontú, e élű G összefüggő irányítatlan gráf. Adjunk $O(e)$ költségű algoritmust olyan $X \subset V(G)$ központi ponthalmaz keresésére, melyre $|X| \leq n/2$ teljesül! Az $X \subseteq V(G)$ egy *központi ponthalmaz*, ha G minden pontja vagy X-beli, vagy egyetlen éllel elérhető valamelyik X-beli pontból.