

Algel XIV. gyakorlat

$P?NP$, part 2, miközben a félévnek is vége lett

2013. május 13.

Hasznos tudnivalók

- NP -teljesség bizonyítása π_{uj} problémára:

1. π_{uj} NP -beliségének bizonyítása.

2. π_{uj} NP -nehézségének bizonyítása:

(a) Találunk egy vele kapcsolatba hozható problémát, ami ismert NP -teljes, ez legyen π_{ismert} .

(b) Bemutatunk egy $\pi_{ismert} \prec \pi_{uj}$ Karp-redukciót, az irány **eszméletlenül fontos!** Azaz van egy π_{ismert} -beli kérdésünk (**nem az aktuális probléma**, hanem egy ismert nehéz!), azt átalakíthatjuk, és átalakítva bedobjuk a π_{uj} -t (az egyelőre ismeretlen nehézségű problémát) megoldó fekete dobozba, és ez a válasz lesz az eredeti kérdésünkre is a válasz! Tehát az átalakítást kell megadni, arra jár a pont.

(c) Bizonyítjuk a Karp-redukció helyességét. Azaz, ha f az átalakítás: $x \in \pi_{ismert} \Leftrightarrow f(x) \in \pi_{uj}$ a bizonyítandó. Figyelem! **Két bizonyítás**, akkor és csak akkor, „ \Leftrightarrow ”!

(d) Belátjuk, hogy f polinom időben elvégezhető.

- Tanult NP -teljes problémák: SAT, 3SZIN, kSZIN, MAXFTL, MAXKLIKK, H-kör, H-út, RÉSZGRÁFIZO, Részhalmazösszeg (RH), PARTÍCIÓ, HÁTIZSÁK.

Feladatok

1. Gondolkozzunk el az NP -nehézség és NP -teljesség fogalmakon!
2. Adjunk Karp-redukciót a 3-SZÍN nyelvről a 4-SZÍN nyelvre!
3. **[Vizsga: 2007. május 29.]** A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet és vagy lássa be róla, hogy P -ben van vagy azt, hogy NP -teljes.
4. Bizonyítsuk be a következő problémáról, hogy NP -teljes, vagy azt, hogy P -beli!

$$L = \{G \mid G \text{ irányítatlan teljes gráf, amiben van Hamilton-kör}\}$$

5. **[Vizsga: 2008. június 10.]** Tegyük fel, hogy $P \neq NP$. Az alábbi feltételek közül melyikből következik és melyikből nem következik hogy az X eldöntési probléma nem P -beli?
 - (a) Egy NP -teljes Y problémára X Karp-redukálható.
 - (b) Egy NP -teljes Y probléma Karp-redukálható X -re.
 - (c) az X probléma NP -beli.

-
6. Mi az alábbi problémák bonyolultsága, ha az input egy $G(V, E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$)? Természetesen bizonyítsuk is be!

- (a) Van-e G -ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?
- (b) Van-e G -ben legalább $n/100$ hosszúságú kör?
- (c) Van-e G -ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?
- (d) Van-e G -ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3?

7. **[Vizsga: 2011. december 22.]** Igazold, hogy a következő eldöntési probléma P -ben van, vagy azt, hogy NP -teljes ($e(G)$ a gráf éleinek, $v(G)$ a gráf pontjainak számát jelöli):
Input: G gráf, melyre teljesül, hogy $e(G) \leq 3v(G)$
Kérdés: Igaz-e, hogy G kiszínezhető 3 színnel?
8. Bizonyítsuk be, hogy a leghosszabb út meghatározása egy irányított, élsúlyozott G gráfban NP -teljes! (Pontosabban az ehhez tartozó eldöntési probléma.) Másképpen: bizonyítsuk be, hogy

$$L = \{(G, k) \mid G \text{ irányított, élsúlyozott gráf, van benne legalább } k \text{ súlyú út}\}$$
 NP -teljes!
9. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv P -ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:

$$\{(G, k) \mid G \text{ egy síkgráf, amiben van } k \text{ pontú klikk}\}$$
Mutassa meg, hogy ez a nyelv NP -teljes, vagy mutassa meg, hogy a nyelv P -ben van.
10. **[Vizsga: 2009. május 28.]** P -beli vagy NP -teljes az alábbi probléma? Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és az a kérdés, hogy van-e olyan C kör a gráfban, melyhez minden $v \notin C$ csúcsból vezet él.
11. **[Vizsga: 2010. május 27.]** Az árvíz több helyen fenyegeti a gátakat, tudjuk, hogy n kritikus hely van. Ezek közül az i -ediknél a gát megfelelő megerősítéséhez h_i darab homokzsák kell. Ha az erősítés nem történik meg (vagy csak kevesebb homokzsákkal), akkor az i -edik helyen k_i kárt okoz a folyó. Adottak a h_i és k_i pozitív számok, továbbá a gátak megerősítéséhez összesen rendelkezésre álló homokzsákok Z száma ($Z > 0$ egész). Azt szeretnénk meghatározni, hogy ennyi homokzsákkal hogyan tudjuk a kárt minimalizálni, ha feltesszük, hogy a meg nem erősített pontokon keletkező károk összeadódnak.
Fogalmazza meg a feladatot eldöntési problémaként és vagy adjon rá polinomiális algoritmust vagy igazolja, hogy a probléma NP -teljes!
12. **[Vizsga: 2012. december 20.]** Tegyük fel, hogy $NP \subseteq P$. Következik-e ebből, hogy az alábbi eldöntési feladat $coNP$ -beli?
Input: G irányítatlan gráf
Kérdés: Igaz-e, hogy G élei kiszínezhetők 2014 színnel úgy, hogy az egy csúcsra illeszkedő élek színei mind különbözőek?
13. **[Vizsga: 2010. május 27.]** Az X probléma bemenete egy binárisan felírt $N > 0$ egész szám, és akkor lesz a válasz igen, ha N nem 2-hatvány. Az Y probléma bemenete egy G egyszerű gráf, és akkor lesz a válasz igen, ha G csúcsainak színezéséhez 3-nál több szín kell. Ha feltesszük, hogy $P \neq NP$, akkor van-e $X \prec Y$, illetve $Y \prec X$ Karp-redukció?
14. **[Vizsga: 2010. június 17.]** Az X problémában adott egy G dag és egy k pozitív egész szám, a kérdés, hogy van-e G -ben legalább k élű út. Igaz-e, hogy $X \prec 3SZÍN$, illetve, hogy $3SZÍN \prec X$?
15. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Igazolja, hogy ha a 3SZÍN nyelv benne van $coNP$ -ben, akkor $NP = coNP$.
16. $P?NP$
17. Gondolkozz el a félévben tanultakon, fogalmazz meg kérdéseket, stb!
18. Oldj meg sok feladatot a vizsgára, tanulj sokat, ha valami nem világos, akkor esetleg a gyakvezéredet is megkérdezheted a drotos@cs.bme.hu címen!
19. ???
20. Profit! (80 pont körüli vizsga!)

Köszönöm a lelkes részvételt a gyakorlatokon, kellemes vizsgázást!
DM