Algel XIV. gyakorlat

$P?NP$, part 2

2012. május 7.

1. **Gondolkozzunk el az NP-nehézség és NP-teljesség fogalmakon!**
   Minél jobban!

2. **Adjunk Karp-redukciót a 3-SZÍN nyelvről a 4-SZÍN nyelvre!**
   Adott G gráf, amiről el kell dönteni, hogy színezhető-e 3 színnel. Ezt kell visszavezetni 4 színnel színezésre. Vegyünk fel egy új pontot (v), ezt kössük hozzá az összes G-beli ponthoz. Legyen ez a gráf G'. Állítás: $G \in 3SZIN \Leftrightarrow G' \in 4SZIN$. $G \in 3SZIN \Rightarrow G' \in 4SZIN$: vegyük G egy 3 színnel színezését, és adjuk v-nek a negyedik színt G'-ben. Ez a színezés jó lesz. $G \in 4SZIN \Rightarrow G' \in 3SZIN$: vegyük G' egy 4 színnel színezését. Ekkor v színe különbözik az összes csúcs színétől, így a többi csúcs pont G egy jó 3 színnel színezése szerint van színezve. Az átalakítás polinomiális.

3. **[Vizsga: 2007. május 29.] A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet és vagy lássa be róla, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes.**
   A nyelv:

   $$L = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan csúcssúlyozott teljes gráf, amiben van legfeljebb } k \text{ levélsúlyú feszítőfa}\}$$

   Ez NP-teljes. NP-beli, mert egy jó tanú egy ilyen feszítőfa (ellenőrzés polinom időben megy, a mérete is polinom). Adunk egy H-út$\prec L$ Karp-redukciót. Ha egy G gráfban Hamilton-utat keresünk, akkor minden csúcshoz rendeljünk 1 súlyt, és az így keletkezett G' gráfban keressünk legfeljebb 2 levélsúlyú feszítőfát! Állítás: $G \in H$-út $\Leftrightarrow (G', 2) \in L$. $G \in H$-út $\Rightarrow (G', 2) \in L$: G egy Hamilton-útja pont egy két levelű, 2 súlyú feszítőfa G'-ben. $(G', 2) \in L \Rightarrow G \in H$-út: egy ilyen feszítőfának pontosan 2 levele kell, hogy legyen (ha több lenne, nagyobb lenne a súlya, egy fában pedig mindig van legalább 2 levél). Ez pedig pont egy olyan utat jelent, ami tartalmazza a gráf összes csúcsát, tehát G egy Hamilton-útját. A csúcsoknak súlyt adni lehet polinom időben.

4. **Bizonyítsuk be a következő problémáról, hogy NP-teljes, vagy azt, hogy P-beli!**

   $$L = \{G \mid G \text{ irányítatlan teljes gráf, amiben van Hamilton-kör}\}$$

   P-beli, mert polinom időben ellenőrizhetjük, hogy teljes-e a gráf. Ha nem, akkor a válasz nem, ha pedig igen, akkor mindenképp van benne Hamilton-kör, így a válasz igen.

5. **[Vizsga: 2008. június 10.] Tegyük fel, hogy $P \neq NP$. Az alábbi feltételek közül melyikből következik és melyikből nem következik hogy az X eldöntési probléma nem P-beli?**

   (a) **Egy NP-teljes Y problémára X Karp-redukálható.**
   Ez nem mond semmit X-ről, hiszen $P \subseteq NP$, és minden NP-beli visszavezethető tetszőleges NP-teljesre.

   (b) **Egy NP-teljes Y probléma Karp-redukálható X-re.**
   Ekkor X NP-nehéz, ami $X \in P$ esetén $P = NP$-t jelente, amit feltettünk hogy nem így van. Így X nem P-beli.

   (c) **az X probléma NP-beli.**
   Ettől még lehet P-ben is, hiszen $P \subseteq NP$.

6. **Mi az alábbi problémák bonyolultsága, ha az input egy $G(V, E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$)? Természetesen bizonyítsuk is be!**

   (a) **Van-e G-ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?**
   P-beli, az összes lehetséges 15 pontú részgráf száma $\binom{n}{15} = O(n^{15})$, így mindegyiket meg tudjuk vizsgálni.

   (b) **Van-e G-ben legalább $n/100$ hosszúságú kör?**
   NP-teljes. NP-beli: tanú egy ilyen kör (poli ell, poli méret). NP-nehéz: H-körről Karp-redukció: G' legyen G kiegészítve $99n$ izolált ponttal, tehát $n' = 100n$. Ha G-ben van H-kör, akkor G'-ben ez G-ben pont egy $n = n'/100$ hosszú kör. Ha G'-ben van egy $n'/100 = n$ hosszú kör, ez (a $99n$ izolált pont miatt) csak úgy lehet, hogy a kör kizárólag a G-ben is meglévő pontokat tartalmazza. Ez viszont pont egy H-kör G-ben. Az átalakítás polinomiális.

   (c) **Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?**
   Ez a H-út probléma szinonímája, amiről tudjuk, hogy NP-teljes.

   (d) **Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3?**
   NP-teljes. NP-beli: tanú egy ilyen feszfa, ez jó, mert .... NP-nehéz: az előző problémát vezetjük vissza rá. G' legyen olyan, hogy G minden pontjához hozzákötünk egy elsőfokú pontot. Ha G-ben van olyan feszfa, amiben a maxfok legfeljebb 2, akkor G'-ben ehhez hozzávéve az új elsőfokú pontokat pont egy jó feszfát kapunk. Ha G'-ben van olyan feszfa, amiben a maxfok legfeljebb 3, akkor az új elsőfokú pontokhoz vezető élek ebben biztos benne vannak. Ha ezeket elhagyjuk, akkor a feszfa minden egyes pontjának a fokát pontosan eggyel csökkentjük, de az eredeti gráfban ez még mindig feszfa marad, vagyis pont G egy megfelelő feszfáját kapjuk. Az átalakítás polinomiális, hiszen n új csúcsot és n új élet vettünk fel.

7. **Bizonyítsuk be, hogy a leghosszabb út meghatározása egy irányított, élsúlyozott G gráfban NP-teljes! (Pontosabban az ehhez tartozó eldöntési probléma.) Másképpen: bizonyítsuk be, hogy**

$$L = \{(G, k) \mid G \textbf{ irányított, élsúlyozott gráf, van benne legalább } k \textbf{ súlyú út}\}$$

   NP**-teljes!**
   NP-beliség: tanú egy ilyen út, méret $O(n)$, ellenőrzés $O(n)$, tehát polinomiális. NP-nehézség: a H-út problémát fogjuk rá visszavezetni (H-út $\prec L$). A G gráfból, amiben H-utat kell keresni, csinálunk egy súlyozott gráfot, minden élsúlyt 1-re állítunk, és legalább $n-1$ súlyú út létezését kérdezzük (ez a gráf legyen G'). Egyik irány: ha van G-ben H-út, akkor G'-ben van legalább $n-1$ súlyú út, mert a G-beli H-út pont ilyen G'-ben. Másik irány: ha van G'-ben legalább $n-1$ súlyú út, akkor ez az 1 súlyok miatt legalább $n-1$ élből áll, tehát minden csúcson keresztülmegy, vagyis ez pont egy H-út G-ben. Az átalakítás triviálisan polinomiális.

8. **[Vizsga: 2007. június 12.] Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv P-ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:**

$$\{(G, k) \mid G \textbf{ egy síkgráf, amiben van } k \textbf{ pontú klikk}\}$$

   Mutassa meg, hogy ez a nyelv NP-teljes, vagy mutassa meg, hogy a nyelv P-ben van.
   P-beli. Először ellenőrizzük a síkgráfságot (erről tudjuk, hogy P-beli). Ha nem, akkor nincs a nyelvben. Ha igen, és $k > 4$, akkor szintén nem, hiszen K_5 biztos nincs benne. Egyébként legfeljebb $O(\binom{n}{4}) = O(n^4)$ lehetőséget kell végignézni.

9. **[Vizsga: 2009. május 28.]** P**-beli vagy** NP**-teljes az alábbi probléma? Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és az a kérdés, hogy van-e olyan C kör a gráfban,**

melyhez minden $v \notin C$ csúcsból vezet él.

NP-teljes. NP-beliség: tanú egy ilyen kör, mérete $O(n)$, ellenőrzés szintén polinomiális. NP-nehézség: $H \prec L$ visszavezetést csinálunk. G gráfról kérdés, hogy van-e benne H-kör. Csinálunk egy G' gráfot úgy, hogy G minden csúcsához felveszünk egy új csúcsot, ami kizárólag a saját párjával van összekötve, és G'-ről kérdezzük meg, hogy van-e benne ilyen C kör. Helyesség: egyik irány: ha G-ben van H-kör, akkor ez egy jó C kör G'-ben, hiszen az extra pontok közül mindegyik kapcsolódik hozzá, az összes többi pedig a körben van. Másik irány: ha van ilyen C kör G'-ben, akkor az összes extra elsőfokú pontnak kapcsolódnia kell hozzá, továbbá ezek a pontok nyilván nem lehetnek benne. Vagyis a kör pont az összes G-beli ponton megy át, azaz ez G-nek egy H-köre. Az átalakítás n él és csúcs felvétele, ami nyilván polinomiális.

10. **[Vizsga: 2010. május 27.] Az árvíz több helyen fenyegeti a gátakat, tudjuk, hogy n kritikus hely van. Ezek közül az i-ediknél a gát megfelelő megerősítéséhez h_i darab homokzsák kell. Ha az erősítés nem történik meg (vagy csak kevesebb homokzsákkal), akkor az i-edik helyen k_i kárt okoz a folyó. Adottak a h_i és k_i pozitív számok, továbbá a gátak megerősítéséhez összesen rendelkezésre álló homokzsákok Z száma ($Z > 0$ egész). Azt szeretnénk meghatározni, hogy ennyi homokzsákkal hogyan tudjuk a kárt minimalizálni, ha feltesszük, hogy a meg nem erősített pontokon keletkező károk összeadódnak.**

    Fogalmazza meg a feladatot eldöntési problémaként és vagy adjon rá polinomiális algoritmust vagy igazolja, hogy a probléma NP-teljes!

    $\pi = \{h_1, \ldots, h_n, k_1, \ldots, k_n, Z, K | \forall h_i, k_i > 0; Z \in \mathbb{Z}^+; \exists \text{zsákkiosztás, hogy a megelőzött kár} \geq K\}$

    Érdemes észrevenni, hogy nem a kár minimalizálása felől közelítjük meg a problémát, hanem a megelőzött kár maximalizálása felől. Ez a probléma NP-teljes. NP-beli, mert jó tanú egy zsákkiosztás, mérete, ellenőrzése polinomiális. NP-nehéz, HÁTIZSÁK $\prec \pi$ visszavezetést tudunk triviálisan csinálni: ha adott egy hátizsák feladat, akkor s_i súly legyen az árvizes problémában h_i, c_i érték legyen k_i, az S súlykorlát legyen a Z zsákkorlát, a legalább elérendő C érték pedig a legalább megelőzendő K kár. A helyesség és a visszavezetés polinomiálissága triviális.

11. **[Vizsga: 2010. május 27.] Az X probléma bemenete egy binárisan felírt $N > 0$ egész szám, és akkor lesz a válasz `igen`, ha N nem 2-hatvány. Az Y probléma bemenete egy G egyszerű gráf, és akkor lesz a válasz `igen`, ha G csúcsainak színezéséhez 3-nál több szín kell. Ha feltesszük, hogy $P \neq NP$, akkor van-e $X \prec Y$, illetve $Y \prec X$ Karp-redukció?**

    $X \in P$, hiszen a bináris felírásban a 2-hatványságot triviális ellenőrzni (pontosan 1 darab 1-es érték lehet). Y probléma a 3SZÍN komplementere, így $coNP$-teljes. $X \prec Y$ biztosan van, hiszen egy $coNP$-teljes problémára bármely $coNP$-beli, így bármely P-beli visszavezethető ($P = coP \subseteq coNP$). Ha létezne $Y \prec X$ visszavezetés, akkor $P = coNP$ lenne, amiből következne $P = NP$, ez pedig ellentmond a feltevésnek, tehát ilyen nem lehet.

12. **[Vizsga: 2010. június 17.] Az X problémában adott egy G dag és egy k pozitív egész szám, a kérdés, hogy van-e G-ben legalább k élű út. Igaz-e, hogy $X \prec$ 3SZÍN, illetve, hogy 3SZÍN $\prec X$?**

    $X \in P$, hiszen mint tudjuk, DAG-ban a leghosszabb út keresése polinomiális. 3SZÍN ismerten NP-teljes. Az NP-teljesség definíciója miatt $X \prec$ 3SZÍN biztos létezik (bármely NP-beli visszavezethető bármely NP-teljesre, valamint $P \subseteq NP$). Ha létezne 3SZÍN $\prec X$, akkor minden NP-beli probléma polinom lépésben megoldható lenne, így $P = NP$ lenne. Tehát egy ilyen visszavezetés létezéséről nem tudunk mit mondani (persze ha valaki mégis bizonyítja vagy a létezését, vagy a nemlétezését, akkor sok jó dolgot kap).

13. **[Vizsga: 2007. június 12.] Igazolja, hogy ha a 3SZÍN nyelv benne van $coNP$-ben, akkor $NP = coNP$.**

A Karp-redukció helyessége nem függ az igen vagy nem választól (acsa feltétel van benne). Először tfh egy probléma NP-beli. Igazolni szeretnénk, hogy amennyiben egy konkrét kérdésére a válasz nem, akkor létezik erre megfelelő tanú. Mivel 3SZÍN-re vissza tudjuk vezetni, az pedig a feltétel szerint $\in coNP$, így a visszavezetés utáni feladatra NEM válasz esetén létezik megfelelő tanú, de a visszavezetés tulajdonságai miatt ez jó tanú a kérdéses feladatra is. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges NP-beli probléma nem válaszára létezik megfelelő tanú, vagyis $NP \subseteq coNP$.

Ugyanezzel a gondolatmenettel a másik irányba beláthatjuk, hogy $coNP \subseteq NP$. A kettőből pedig következeik, hogy $NP = coNP$.