Algel XIII. gyakorlat

$P?NP$, part 1

2012. április 23.

1. **Gondolkozzunk el az NP-beliség, $coNP$-beliség és P-beliség fogalmakon!**
   De tényleg!

2. **Lássuk be, hogy az alábbi problémák NP-beliek! Melyekről tudjuk megmondani, hogy coNP-ben vannak? Melyekről, hogy P-ben?**

   (a) $\pi_1 = \{(G, k) \mid G$ gráf kiszínezhető k színnel$\}$
   Tanú: megfelelő színezés. Méret: kn, ami polinomiális az input méretében. Ellenőrzés: páronként a pontokat, $O(n^2)$, ami polinomiális. P-beliségről vagy $coNP$-beliségről nem tudunk mit mondani.

   (b) $\pi_2 = \{G \mid G$ irányítatlan gráfban van Euler-kör$\}$
   Tanú: egy ilyen kör, ez jó mert blabla. Amúgy P-beli. $coNP$-beliségre szemléletes tanú egy ptlan fokszámú pont (+öf ellenőrzése) (de természetesen a P-beliség minden további nélkül bizonyítja a $coNP$-beliséget).

   (c) $\pi_3 = \{(G, k) \mid G$ irányítatlan gráfban van k független pont$\}$
   Tanú: k független pont, ez jó mert blabla. P-beliségről vagy $coNP$-beliségről nem tudunk mit mondani.

3. **Bizonyítsuk be, hogy a következő probléma P-beli:**

$$\pi = \left\{ G \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ gráf kiszínezhető a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy,} \\ \text{hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék} \end{array} \right\}$$

   A piros és kék színeket legfeljebb $n\binom{n-1}{2} = O(n^3)$ féle módon oszthatjuk ki, ami polinomiális. Minden kiosztáshoz a maradék gráfot két színnel kell színezni, ami P-beli feladat (páros gráfság eldöntése). Így polinomszor kell egy polinom költségű algoritmust futtatni, ami polinom időben megy.

4. **Tegyük fel, hogy van egy olyan F eljárásunk, ami egy input G gráfra és k számra 1 lépés alatt megmondja, hogy van-e G-ben legalább k méretű független ponthalmaz. Tervezzünk olyan algoritmust, ami polinomidőben**

   (a) **meghatározza $\alpha(G)$-t!**
   Van-e benne 1 ftln pont? Ha igen, van-e benne 2? Ha igen, van-e benne 3? Az első NEM válasznál (mondjuk k)-nál tudjuk, hogy $\alpha(G) = k - 1$. Lépésszám $O(n)$ a feltételezés miatt. Lehet bináris kereséssel is, így a lépésszám $O(\log n)$.

   (b) **talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt!**
   Meghatározzuk $\alpha(G)$-t mondjuk $O(\log n)$ időben. Választunk egy pontot, kitöröljük a gráfból, és megkérdezzük a maradékról, hogy van-e benne $\alpha(G)$ független pont. Ha igen, akkor az adott pont nem lehetett egy max. ftln ponthalmaz része, hiszen ekkor létezne a gráfban $\alpha(G) + 1$ független pont. Ha nem, akkor pedig biztos egy max. ftln halmazbeli pontot töröltünk. Ugyanezt megcsináljuk az összes többi pontra is úgy, hogy a törölt pontokat nem állítjuk vissza. Ha megvan $\alpha(G)$ pont, akkor kész vagyunk, és legfeljebb $O(n)$ lépésszámunk van (a feltételezés figyelembevételével).

5. **Lássuk be, hogy az alábbi problémák NP-beliek! Melyekről tudjuk megmondani, hogy coNP-ben vannak? Melyekről, hogy P-ben?**

(a) $\pi_1 = \{(G,k) \mid G$ páros gráfban van teljes párosítás$\}$
Tanú: ilyen párosítás. Méret: $O(n)$, ellenőrzés $O(n)$, tehát jó. (Egyébként pl magyar módsze polinom idejű, ezért ez P-ben van, így értelemszerűen $coNP$-ben is. A Hall-tétel segítségével szemléletesen lehet $coNP$-beliséget bizonyítani: tanú egy olyan $X \subseteq A$ lesz, hogy $|X| < |N(X)|$).

(b) $\pi_2 = \{(G,k) \mid G$ páros gráfban van k élből álló párosítás$\}$
Tanú: ilyen párosítás. Méret: $O(n)$, ellenőrzés $O(n)$, tehát jó. (Egyébként pl magyar módsze polinom idejű, ezért ez P-ben van, így értelemszerűen $coNP$-ben is.)

(c) $\pi_3 = \{G \mid G$ irányítatlan gráf, van benne pontosan 100 élből álló kör$\}$
Tanú: egy ilyen kör, ez jó mert blabla. Egyébként P-beli, mert a kör legfeljebb $O(\frac{n!}{(n-100)!})$ féleképpen állhat elő, ami $O(n^100)$ (ha minden lehetséges pontsorrendet megvizsgálunk). Ebből következően $coNP$-beli is.

(d) $\pi_4 = \{(G,k) \mid G$ irányítatlan gráf, van benne legalább k élből álló kör$\}$
Tanú: egy ilyen kör, ez jó mert blabla. P-beliségről vagy $coNP$-beliségről nem tudunk mit mondani. (n^k nem polinomiális, ha k az input része!)

(e) $\pi_5 = \left\{ (s_1, s_2, \ldots, s_n, b) \mid \forall i \ s_i, b \in \mathbb{Z}^+; \exists j_1, \ldots, j_k \ (1 \le k \le n) : \sum_{l=1}^{k} s_{j_l} = b \right\}$
Ez a részhalmazösszeg probléma, szépen megfogalmazva. Tanú: egy jó indexhalmaz, azaz egy megfelelő részhalmaz, ez jó mert blabla. P-beliségről vagy $coNP$-beliségről nem tudunk mit mondani.

6. **A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazzuk meg a feladathoz tartozó eldöntési problémát, és bizonyítsuk be, hogy NP-beli!**
A probléma:

$$L = \{(G,k) \mid G \text{ irányítatlan csúcssúlyozott teljes gráf, amiben van legfeljebb } k \text{ levélsúlyú feszítőfa}\}$$

NP-beli, mert egy jó tanú egy ilyen feszítőfa (ellenőrzés polinom időben megy, a mérete is polinom).

7. **Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! (Vagyis input: G és k; output: igen/nem). Hogy tudnánk ennek segítségével polinom időben meghatározni $\chi(G)$-t?**
Legegyszerűbben úgy, hogy megkérdezzük: kiszínezhető-e 1 színnel? 2-vel? 3-mal?... Az első igen válasznál megvan $\chi(G)$ értéke. Legfeljebb n-szer polinom idő, ami összességében polinom. (Ügyesebbek csinálhatják bináris kereséssel is.)

8. **Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! A fentiek értelmében azt is megtudhatjuk polinom időben, hogy mennyi $\chi(G)$. Hogyan tudnánk kiszínezni polinom időben a gráfot $\chi(G)$ színnel?**
Vegyünk fel G mellé egy $K_{\chi(G)}$-t, azaz $\chi(G)$ pontú teljes gráfot. Az egyes pontjai jelentsék a színeket, amikkel G-t ki akarjuk színezni. Ha egy darab pont (k) kivételével $K_{\chi(G)}$ minden pontját összekötjük G egy v pontjával, az azt jelenti, hogy v-t k színűre színeztük (könnyű belátni, hogy más színt nem kaphat). Vegyük sorra G pontjait, és kezdjük el próbálgatni a színeket. Ha v pontra k színt előírunk, akkor megkérdezzük, hogy az aktuális $G \cup K_{\chi(G)}$ gráfunk színezhető-e $\chi(G)$ színnel. Ha igen, akkor találtunk v-nek egy jó színt és folytathatjuk $v+1$-gyel, ha nem, akkor töröljük a v k-ra színezéséhez szükséges éleket és próbálkozunk a $k+1$ színnel.

A végén minden csúcsnak lesz egy jó színe. Legfeljebb n csúcsra n színt próbálunk ki, egy próba pedig egy $2n$ csúcsú gráfról kérdez színezhetőséget, vagyis a feltételezés figyelembevételével összességében polinomiális lesz az algoritmus.

9. **Legyen a π döntési probléma inputja egy G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen", ha G síkbarajzolható. Mutassuk meg, hogy $\pi \in NP \cap coNP$.**
Ha tudjuk, hogy a síkbarajzolhatóság eldöntése P-beli, akkor ez minden további nélkül bizonyítja az állítást. Ha esetleg ezt nem tudnánk:
$\pi \in NP$: tanú: egy konkrét lerajzolás (pl a pontok koordinátáival). Méret: $2n$, azaz polinomiális. Ellenőrzés: élpáronként metszéspont-számítás, egyenként polinomiális, összességében $O(e^2)$ darabot kell, ami még mindig polinomiális.
$\pi \in coNP$: tanú: egy Kuratowski-gráffal topologikusan izomorf részgráf. Méret: mivel részgráf, nem lehet nagyobb G méreténél, azaz biztos polinomiális. Ellenőrzés: részgráfság ellenőrzése (polinomiális), valamint a másodfokú pontok kezelése után (polinomiális) Kuratowski-gráfság ellenőrzése (konstans).