Algel IX. gyakorlat

DAG!

2011. április 4.

1. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával: $a[b,c]$, $b[a,d]$, $c[a,d]$, $d[b,c,e,f]$, $e[d,f,g]$, $f[d,e,g,h]$, $g[e,f,h]$, $h[f,g]$. Keressünk G-ben a-ból kiinduló mélységi feszítőfát! (A mélységi- és befejezési számok feltüntetésével, az élek osztályozásával.) Nézzük meg, hogy az élek megirányítása után erősen összefüggő lesz-e a gráf!

2. A 6 pontú irányított G gráf csúcsait jelölje x, y, z, u, v, w. A gráf egy mélységi bejárásánál a mélységi, ill. a befejezési számok a következők: $x : 1, 6$; $y : 2, 4$; $z : 6, 5$; $u : 3, 3$; $v : 4, 1$; $w : 5, 2$. Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit! Rekonstruálható-e G az előző számok ismeretében?

3. **[ZH: 2011. március 28.]** Van b darab borítékunk, az i-ediknek a hossza h_i, a magassága m_i. Az i-edik borítékba akkor tudjuk berakni a j-edik borítékot, ha $h_j < h_i$ és $m_j < m_i$ is teljesül (nem forgatjuk és nem is hajtogatjuk a borítékokat). Célunk, hogy minél hosszabb olyan láncot alakítsunk ki, hogy az i-edikben benne van a j-edik, abban a k-adik, stb.

   Legyen adott egy $L > 0$ egész és a h_i és m_i számok. Hogyan lehet $O(b^2)$ lépésben eldönteni, hogy kialakítható-e a borítékokból egy L hosszú lánc?

---

4. **[ZH: 2008. március 28.]** Egy $n \times n$ méretű táblázat minden eleme egy egész szám. A táblázat bal alsó sarkából akarunk eljutni a jobb felső sarkába úgy, hogy egy lépésben a táblázatban vagy felfelé vagy jobbra egyet lépünk. Azt szeretnénk, hogy a lépegetés során látott elemek növekvő sorrendben kövessék egymást. Egy ilyen út értéke a benne szereplő számok összege. Adjon $O(n^2)$ futási idejű algoritmust, ami meghatározza, hogy az adott táblázatban a szabályok szerinti utak értékei között mekkora a legnagyobb! *(Persze, dinprog is kézenfekvő, de most DAG-gal!)*

5. **[Vizsga: 2008. május 27.]** Éllistával adott egy n pontú e élű irányított gráf. Azt szeretnénk tudni, hogy van-e benne olyan minden pontot tartalmazó részgráf, ami egy, a gyökerétől a levelek felé irányított fa. Adjon $O(ne + n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami ha van, talál egy ilyen részgráfot.

6. **[ZH: 2007. április 27.]** Az $n \times n$ méretű tábla minden mezőjére egy pozitív egész szám van írva, az i-edik sorának j-edik elemére $A[i, j]$, ahol $0 \le i, j < n$. Feladat, hogy az első oszlopból eljussunk az utolsó oszlopba úgy, hogy egy lépésben mindig a következő oszlopba lépünk, és azon belül, ha az i-edik sorban voltunk, akkor a következő lépésben vagy az $(i-1) \pmod n$, vagy az i, vagy az $(i+1) \pmod n$ számú sorba kerülhetünk. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy az első oszlop melyik eleméből induljunk, ha azt akarjuk, hogy a bejárt mezőkön lévő számok összege minimális legyen (az utolsó oszlop bármelyik mezője lehet az utolsó olyan mező, amire rálépünk).

7. **[Vizsga: 2010. június 3.]** Egy falutörténet írója n korábbi lakosról gyűjtött információkat. A kérdésekre kapott válaszok a következő típusúak voltak:

   - S_i személy meghalt S_j születése előtt;
   - S_i személy élete során született S_j;
   - S_i személy korábban született, mint S_j;
   - S_i korábban halt meg, mint S_j.

   Egy S_i, S_j párra nem biztos, hogy szerepel minden választípus, és olyan pár is lehet, amely egyetlen válaszban sem szerepel együtt. Mivel az emberek időnként rosszul emlékeznek, nem biztos, hogy minden kapott információ helyes. Adjon algoritmust, amivel k db fenti típusú válaszról $O(n + k)$ lépésben eldönthető, hogy van-e közöttük ellentmondás.

8. **[ZH: 2005. április 8.]** Cirkuszi akrobaták egymás vállára állva minél nagyobb tornyot szeretnének létrehozni (a toronyban minden szinten csak egy akrobata lesz). Esztétikai és gyakorlati szempontok miatt egy ember vállára csak egy olyan állhat, aki nála alacsonyabb és könnyebb is. A cirkuszban n akrobata van, adott mindegyikük magassága és súlya. Adjon algoritmust, amely $O(n^2)$ lépésben megadja a lehetséges legtöbb emberből álló torony összeállítását.

9. **[ZH: 2007. április 27.]** Tekintsük az olyan G irányított gráfokat, amelyekben ha eltekintünk az élek irányításától, akkor a kapott irányítatlan G' gráf összefüggő. A G gráf egy mélységi bejárásánál maximálisan hány olyan csúcs lehet, amelyre a mélységi és a befejezési szám megegyezik?

10. Adjunk algoritmust, mely egy éllistával megadott irányítatlan gráfban vagy talál egy kört, vagy igazolja a gráf körmentességét $O(|V|)$ időben (függetlenül attól, hogy $|E|$ akár sokkal nagyobb is lehet, mint $|V|$)!

11. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Egy számítógéphálózatban n számítógép van. Minden olyan eseményt, hogy az i-edik gép üzenetet küld a j-ediknek (i, j, t) formában feljegyezünk, ahol a t egész szám az üzenet küldésének időpontját jelöli. Ugyanabban a t időpontban egy gép több gépnek is küldhet üzenetet. Ha a t időpontban az i-edik gép vírusos volt, akkor egy (i, j, t) üzenet hatására a j-edik gép mefertőződhet, ami azt jelenti, hogy a $t+1$ időponttól kezdve már a j-edik gép is vírusos lehet. Legyen adott az (i, j, t) hármasoknak egy m hosszú listája, valamint x, y és $t_0 < t_1$ egész számok. Azt kell eldöntenünk, hogy ha az x-edik gép a t_0 időpontban vírusos volt, akkor lehet-e emiatt az y-adik gép a t_1 időpontban vírusos. Adjon algoritmust, ami ezt a kérdést $O((t_1 - t_0)n + m)$ lépés után megválaszolja.

12. **[Vizsga: 2007. június 19.]** Egy előre rögzített útvonalon úgy indulunk el, hogy az autó L literes tankja tele van. Úticélunkhoz úgy akarunk eljutni, hogy legalább egy fél tanknyi benzin maradjon az autóban. Tudjuk, hogy az utunkba eső n benzinkút közül melyikben mennyibe kerül a benzin, továbbá, hogy két szomszédos benzinkút között, valamint a kiindulóponttól az első benzinkútig, illetve az utolsó benzinkúttól a célunkig mennyi benzint fogyaszt az autó. Az egyszerűség kedvéért ha megállunk egy benzinkútnál, akkor mindig tele tankolunk. Adjon algoritmust, ami $O(Ln^2)$ lépésben megmondja, hogy hol álljunk meg tankolni ha azt akarjuk, hogy utunk során a benzinköltség minimális legyen. *(Javítási útmutatóban: ELNEZEST, a feladatba bele akartam irni, de kimaradt, hogy a fogyasztas mindig egesz liter. Ha valaki megoldotta e nelkul (es meg jobb is a lepesszama), annak orulunk. Ha valaki feltette, hogy minden egesz, annak is orulunk, mert ezt akartuk es meg gondolatot is tud olvasni.)*

13. A $G(V, E)$ összefüggő, irányított gráf minden éle az $1, 2, \ldots k$ számok valmelyikével van súlyozva. Egy út értéke legyen az úton található élek súlyainak maximuma. Adjunk $O(|E| \log k)$ futásidejű algoritmust az adott $x, y \in V$ csúcsok közti legkisebb súlyú út értékének meghatározására!

14. **[Vizsga: 2003. május 30.]** Éllistával adott egy G gráf, melynek n csúcsa és e éle van. A gráf minden csúcsához hozzá van rendelve egy 1 és k közötti egész szám (címke). Találjunk (ha létezik) olyan *tarka* utat a gráfban, amelyben minden $1 \leq i \leq k$ címke pontosan egyszer fordul elő. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(k!(e + n))$.

15. Bizonyítsuk be, hogy minden $G = (V, E)$ irányított gráf felbontható két DAG-ra; pontosabban az élhalmazának van olyan E_1, E_2 partíciója ($E = E_1 \cup E_2$ és $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), hogy a $G_1 = (V, E_1)$ és a $G_2 = (V, E_2)$ gráfok DAG-ok!