Algel VII. gyakorlat

Keresünk, és még mindig fázunk

2011. március 21.

2-3 fák, B-fák

- az elemeket a levelekben tároljuk, balról jobbra növekvő sorrendben, egy levél egy elemet (rekordot) tartalmaz
- a belső csúcsokban csak kulcsokat és mutatókat tárolunk, minden csúcsnak legalább 2, legfeljebb 3 fia van (B_m-fáknál $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ ill. m, kivéve a gyökér, ahol a triviális esetet leszámítva legalább 2 fiúnak kell lenni)
- a fa levelei a gyökértől egyforma távolságra vannak

Tételek:

1. Ha egy 2-3 fának l szintje van, akkor a levelek száma legalább 2^{l-1}.
2. Ha egy 2-3 fában n elemet tárolunk, akkor a szintjeinek száma legfeljebb $\log_2 n + 1$.
3. Ha egy B_m-fában n elemet tárolunk, akkor a szintjeinek száma legfeljebb
$$\frac{\log_2 n - 1}{\log_2 \lceil \frac{m}{2} \rceil} + 2.$$

Feladatok

1. Építsünk 2-3 fát a következő elemekből, ebben a sorrendben: D, B, E, A, C, F, G! Ezután töröljük D-t és B-t!
2. Egy 2-3 fának 10^9 levele van. Mekkora a szintjeinek minimális, ill. maximális száma? És ha B_{20} fát használnánk?
3. **[ZH: 2009. április 24.]** Egy 2-3 fa gyökerének három fia van, a benne szereplő két érték 40 és 50. Mennyi lehet a tárolt elemek minimális, illetve maximális száma, ha tudjuk, hogy csak pozitív egész számokat tárol a fa?
4. **[Vizsga: 2009. június 17.]** Az MSc-re jelentkezőknek a felvételit alkotó 3 témakör mindegyikéből lesz egy írásbeli pontszámuk (P_1, P_2, P_3), és keletkezik egy felvélteli pontszámuk is (FP). Tegyük fel, hogy a P_i-k 1 és 30 közötti egészek, míg az FP tetszőleges pozitív egész szám lehet. Adjon meg egy olyan adatszerkezetet, amivel a következő műveletek az adott időben végrehajthatóak (n a jelentkezők számát jelöli)!
BESZÚR(P_1, P_2, P_3, FP): az adott pontszámok beillesztése – $O(\log n)$
KERES(p): a pontosan p felvételi ponttal ($FP = p$) rendelkező jelentkezők számát határozza meg – $O(\log n)$
KORLÁT(i, q): az írásbelin az i-edik témakörből legalább q pontot elért jelentkezők számát határozza meg – $O(1)$

---

5. Az $[1, 178]$ intervallum összes egészei egy 2-3 fában helyezkednek el. Tudjuk, hogy a gyökérben két kulcs van, és ezek közül az első 17. Mi lehet a második? Miért?
6. Az S_1 és S_2 kulcshalmazokat kiegészített 2-3 fákban tároljuk. Ezek az eredeti 2-3 fától annyiban különböznek csak, hogy minden csúcsban nyilván van tartva az onnan induló részfa magassága. Tudjuk továbbá, hogy az S_1-beli kulcsok mind kisebbek, mint az S_2-beliek. Javasoljunk hatékony algoritmust a két fa egyesítésére!

7. **[ZH: 2009. június 4.]** Mutassa meg, hogyan kell a 2-3 fa BESZÚR eljárását módosítani, ha a fa minden v csúcsában a szokásos dolgokon kívül azt is nyilvántartjuk, hogy hány levél van a v gyökerű részfában!

8. **[PZH: 2008. május 9.]** Vázolja a 2-3 fának (és műveleteinek) egy olyan módosítását, amiben továbbra is van KERES, BESZÚR, TÖRÖL, MIN, MAX művelet, és ezeken kívül van még RANG és K-ADIK művelet is, ahol RANG(x) azt adja vissza, hogy a tárolt elemek között az x a rendezés szerint hányadik elem, a K-ADIK(i) pedig, hogy a rendezés szerint a tárolt elemek közül melyik az i-edik. A módosítás során a felsorolt szokásos műveletek lépésszámának nagyságrendje ne változzon, és mindkét új művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$, ahol n a tárolt elemek száma.

9. **[Vizsga: 2003. március 31.]** Tervezzen adatstruktúrát a következő feltételekkel. Természetes számokat kell tárolni, egy szám többször is szerepelhet. A szükséges műveletek:
   BESZÚR(i): i egy újabb példányát tároljuk
   TÖRÖL(i): i egy példányát töröljük
   MINDTÖRÖL(i): i összes példányát töröljük
   DARAB(i): visszaadja, hogy hány példány van i-ből
   ELEM(K): megmondja, a nagyság szerinti rendezésben a K-adik elem értékét.
   Az adatstruktúra legyen olyan, hogy ha m*-féle* elemet tárolunk, akkor mindegyik művelet lépésigénye $O(\log m)$.
   (Például ha a tárolt elemek $1, 1, 3, 3, 3, 8$, akkor DARAB$(1) = 2$, ELEM$(4) = 3$ és $m = 3$.)

10. **[ZH: 2003. március 31.]** Egy 2-3 fába egymás után 1000 új elemet illesztettünk be. Mutassa meg, hogy ha ennek során egyszer sem kellett csúcsot szétvágni, akkor a beillesztések sorozata előtt már legalább 2000 elemet tároltunk a fában.

11. **[ZH: 2004. március 29.]** Egy kezdetben üres 2-3 fába az $1, 2, \ldots, n$ számokat szúrtuk be ebben a sorrendben. Bizonyítsa be, hogy a keletkezett fában a harmadfokú csúcsok száma $O(\log n)$.

ZH howto

- Pontos információ (pl. terembeosztás, követelmények) a honlapon.
- Összetűzött, üres lapok, írószer, igazolvány (nem diák), név, neptun, neptun szerinti gyakvez.
- Bármilyen segédeszköz (számológép, puska, stb.) tiltott. A rosszul viselkedőket elküldjük.
- A helyes indoklás a jó eredmény kulcsa! Az indoklás nélküli eredményközlés veszélyes.