

Algel VI. gyakorlat

Keresünk, fázunk

2011. március 19.

Piros-fekete fák

- minden nem levél(=belső) csúcsnak két fia van
- elemeket a belső csúcsokban tárolunk (levélben nem)
- teljesül a keresőfa-tulajdonság
- a fa minden csúcsa piros vagy fekete
- a gyökér fekete
- a levelek feketék
- piros csúcs mindkét gyereke fekete
- minden v csúcsra igaz, hogy az összes v -ből levélbe vezető úton ugyanannyi fekete csúcs van.

Tételek:

1. Egy piros-fekete fa minden v csúcsára teljesül, hogy

$$\frac{m(v)}{2} \leq fm(v) \leq m(v).$$

2. Egy piros-fekete fában az F_v részfa belső csúcsainak száma legalább $2^{fm(v)} - 1$.
3. Ha egy piros-fekete fában n elemet tárolunk, akkor a fa magassága legfeljebb $2 \log(n + 1)$.

Feladatok

1. Építsünk a naiv algoritmussal keresőfát a következő elemekből (a rendezés ABC szerint történik): D, B, E, A, C, F , majd töröljük a következő elemeket: F, D !
2. Építsünk piros-fekete fát a következő számokból: 7, 8, 2, 10, 5, 4. Járjuk be a fát pre-, in-, és postorder módon!
3. **[Vizsga: 2007. június 5.]** Adott egy n csúcsú és egy k csúcsú piros-fekete fa. A két fában tárolt összes elemből $O(n + k)$ lépésben készítsen rendezett tömböt.

4. **[ZH: 2004. március 29.]** Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk. Lehetséges-e, hogy egy $KERES(x)$ hívás során a keresési út mentén a 20, 18, 3, 15, 5, 8, 9 kulcsokat látjuk ebben a sorrendben? Ha nem lehetséges, indokolja meg miért nem, ha pedig lehetséges, határozza meg az összes olyan x egész számot, amire ez megtörténhet.
5. **[ZH: 2009. április 24.]** Egy bináris fa csúcsai 0 és 9 közötti egész számokkal vannak címkézve. Az inorder bejárás során a címkék sorrendje: 9, 3, 1, 0, 4, 2, 7, 6, 8, 5, a postorder bejárásnál pedig 9, 1, 4, 0, 3, x , 7, 5, y , 2. Mi lehet az x és mi az y ?
6. (a) Lehet-e tetszőleges (adott) kulcshalmaz esetén olyan piros-fekete fát építeni, hogy az azonos szinten lévő elemek azonos színűek legyenek?
(b) Van-e olyan piros-fekete fa, ami nem így néz ki?

7. [ZH: 2007. április 27.] Egy piros-fekete fában lehetséges-e, hogy a piros-fekete tulajdonság megsértése nélkül

(a) néhány fekete csúcsot átváltoztathatunk pirosra?

(b) valamelyik (csak egy) fekete csúcsot átváltoztathatjuk pirosra?

(Mást nem változtatunk a fán.)

8. Egy bináris keresőfa csúcsait egy, a gyökértől egy levélig menő út szerint három osztályba soroljuk: B az úttól balra levő, U az útra eső, J pedig az úttól jobbra levő csúcsok halmazát jelöli. Igaz-e mindig, hogy minden B -beli csúcs kulcsa kisebb tetszőleges U -beli csúcs kulcsánál, és minden U -beli csúcs kulcsa kisebb tetszőleges J -beli csúcs kulcsánál?

9. Adott n pont a síkon, melyek páronként mindkét koordinátájukban különböznek. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy bináris fa létezik, melynek csúcsai az adott n pont, és az első koordináta szerint a keresőfa tulajdonsággal, a második szerint a kupac tulajdonsággal rendelkezik! (A kupac tulajdonságba most nem értjük bele, hogy a fa teljes bináris fa legyen.)

10. [Vizsga: 2009. május 28.] Adott egy n csúcsú bináris keresőfa. Ennek minden v csúcsára meg akarjuk határozni, hogy a v gyökerű részében hány darab v -nél kisebb elem van tárolva. Adjon algoritmust, ami ezt a feladatot $O(n)$ lépésben megoldja!

11. [ZH: 2009. április 24.] Egy piros-fekete fában jelölje x és y a gyökér két fiát. Tudjuk, hogy $fm(x) = fm(y)$, de az x csúcs két gyerekének különbözik a fekete magassága. Milyen színű lehet az y csúcs?

12. Adott egy $n = 2^k - 1$ pontú teljes bináris keresőfa. A fában tárolt elemek egészek az $I = [1, 2^k]$ intervallumból, és egy szám legfeljebb egyszer fordul elő a fában. Utóbbi feltétel szerint pontosan egy olyan i egész szám van 1 és 2^k között, amely nincs a fában. Adjunk egy hatékony módszert i meghatározására!

13. Egy fában az x csúcs *súlya* legyen x leszármazottainak száma. Egy bináris fát szigorúan binárisnak mondunk, ha a levelek kivételével minden csúcsnak pontosan 2 fia van. Tegyük fel, hogy egy szigorúan bináris fa minden x csúcsára fennáll, hogy

$$\frac{1}{2} < \frac{\text{súly}(\text{bal}(x))}{\text{súly}(\text{jobb}(x))} < 2.$$

Bizonyítsuk be, hogy ez csakis egy teljes fa lehet, azaz ha k szintje van, akkor a csúcsok száma $2^k - 1$. (Ez nem kifejezetten keresőfázós feladat, de úgy általában érdekes.)