Algel V. gyakorlat

Rendezzük sorainkat

2011. március 7.

1. Legalább hány összehasonlítás kell ahhoz, hogy egy n elemű tömbből egy olyan tagot találjunk meg, ami a tömb 10 legkisebb eleme közé tartozik?

2. **[ZH: 2004. április 8.]** Az $A[1:n]$ tömbben levő elemekről tudjuk, hogy $A[1] \neq A[n]$. Adjon $O(\log n)$ összehasonlítást használó algoritmust, amely talál egy olyan i indexet, hogy $A[i] \neq A[i+1]$!

3. Rendezzük a következő listát buborék-, beszúrásos- és összefésüléses rendezéssel!
4,11,9,10,5,6,8,1,2,16

4. **[ZH: 2004. március 29.]** Az $A[1\dots n]$ tömbben egész számokat tárolunk, ugyanaz a szám többször is szerepelhet. Határozzuk meg $O(n \log n)$ lépésben az összes olyan számot, amelyik egynél többször fordul elő a tömbben.

5. Rendezzük a következő számsorozatot ládarendezéssel, ha tudjuk, hogy 0 és 10 közötti egész számok fordulhatnak csak elő!
7,8,4,5,5,4,5,0,3,4,7,5

6. Rendezzük a következő láncokat a radix rendezés segítségével: $abc, acb, bca, bbc, acc, bac, baa$!

7. **[ZH: 2009. április 24.]** Adottak a $p_0 = (0,0), p_1 = (x_1, y_1), \dots p_n = (x_n, y_n), p_{n+1} = (100, 0)$ pontok a síkban ($n \geq 1$) úgy, hogy $1 \leq i \leq n$ esetén x_i és y_i racionális számok, $0 < x_i < 100$, és semelyik három pont nem esik egy egyenesbe. Egyenes szakaszokkal akarjuk ezeket a pontokat valamilyen sorrendben összekötni úgy, hogy egy $n+2$ csúcsú zárt töröttvonalat kapjunk, amiben a behúzott szakaszok nem metszik egymást. Adjon egy $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust annak meghatározására, melyik pontot melyikkel kössük össze!

---

8. **[ZH: 2007. április 27.]** A valós számokból álló $a_1^2 \dots a_n^2$ sorozat egy darabig nő, utána csökken. Adjon $O(n)$ összehasonlítást használó algoritmust, ami rendezi az $a_1, \dots a_n$ sorozat!

9. Az $A[1:n]$ tömbben egy rendezett univerzum n különböző eleme volt, nagyság szerint növekvő sorrendben. Valaki időközben megkeverte a tömb elemeit, de csak annyira, hogy minden egyes elem új helye az eredetitől legfeljebb 5 távolságra esik. Adjunk $O(n)$ futásidejű algoritmust az eredeti állapot helyreállítására!

10. **[Vizsga: 2007. június 19.]** Adott a síkon n pont, melyek koordinátái $(a_1, b_1) \dots (a_n, b_n)$. Olyan $P = (x, y)$ pontot keresünk a síkon, amire az alábbi összeg minimális.

$$\sum_{i=1}^{n} (|a_i - x| + |b_i - y|)$$

Adjon algoritmust, ami $O(n \log n)$ lépésben meghatároz egy ilyen P pontot.

11. Legyen adott egy egészekből álló $A[1:n]$ tömb valamint egy b egész szám. Szeretnénk hatékonyan eldönteni, hogy van-e két olyan $i, j \in \{1, \dots, n\}$ index, melyekre $A[i] + A[j] = b$. Oldjuk meg ezt a feladatot $O(n \log n)$ időben!

12. **[Vizsga: 2009. június 11.]** Adott a számegyenesen n intervallum, $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$. Azt akarjuk tudni, hogy együtt milyen hosszú részt fednek le a számegyenesből (azaz, hogy mennyi az $\cup_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ összhossza). Adjon $O(n \log n)$ lépéses algoritmust ennek a hossznak a meghatározására!

13. Adottak a sík egész koordinátájú $P_1 = (x_1, y_1), \ldots, P_n = (x_n, y_n)$ koordinátájú pontjai. Javasoljunk $O(n)$ költségű módszert olyan $P_i \neq P_j$ pontok kiválasztására, amelyeken átmenő egyenes által meghatározott félsíkok közül az egyik tartalmazza az összes pontot!

14. A (növekvően) rendezett $A[1:n]$ tömb k elemét valaki megváltoztatta. A változtatások helyeit nem ismerjük. Javasoljunk $O(n + k \log k)$ költségű algoritmust az így módosított tömb rendezésére!

15. Vázoljunk egy $O(n)$ időigényű algoritmust (az időkorlát bizonyításával együtt) n olyan egész számból álló sorozat rendezésére, melynek elemei az

    (a) $\{1, \ldots, 3n\}$ tartományba esnek!

    (b) $\{1, \ldots, n^7 - 1\}$ tartományba esnek!

16. **[Vizsga: 2004. június 10.]** Az n méretű (nem feltétlenül rendezett) A tömb elemei különböző pozitív egész számok. Adjon algoritmust, amely meghatároz egy $1 \leq k \leq n$ számot és kiválaszt k különböző elemet az A tömbből úgy, hogy a kiválasztott elemek összege nem több, mint k^3. Ha nincs ilyen k, akkor az algoritmus jelezze ezt a tényt! Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n \log n)$! (Két szám összehasonlítása, összadása vagy szorzása egy lépésnek számít.)

17. **[Vizsga: 2004. június 3.]** A $2^k - 1$ elemű A tömb elemei mind különbözőek és növekvő sorrendben vannak. Minden elemet egy k hosszú bitsorozat ír le, tehát tekinthetjük úgy, hogy a $0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1$ számokat tároljuk egy kivételével. A feladat ennek a hiányzó számnak a megkeresése. Ehhez egy lépésben valamelyik elem egy bitjére kérdezhetünk rá: a $BIT(i, j)$ eljárás az $A[i]$ elem j-edik bitjét mondja meg. Adjon olyan algoritmust, amely a BIT eljárás $O(k)$-szori hívásával megtalálja a hiányzó számot (bitsorozatot).

18. Adott egy dobozban n különböző méretű anyacsavar, valamint egy másik dobozban a hozzájuk illő apacsavarok. Kizárólag a következő összehasonlítási lehetőségünk van: egy apacsavarhoz hozzápróbálunk egy anyacsavart. A próbának háromféle kimenete lehet: apa<anya, apa=anya, apa>anya, annak megfelelően, hogy az apacsavar külső átmérője hogyan viszonyul az anyacsavar belső átmérőjéhez. Szeretnénk minden anyacsavarhoz megtalálni a megfelelő apacsavart. Adjunk erre a feladatra *átlagosan* $O(n \log n)$ összehasonlítást felhasználó módszert!

19. A 4 elemű I abc felett adott két szó: $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ és $y = y_1 y_2 \ldots y_k$, ahol $1 \leq k \leq n$ és $\forall i, j : x_i, y_j \in I$. Keressük az x szóban az olyan részszavakat, amelyek anagrammái y-nak, azaz az olyan i indexeket, hogy az $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}$ betűk megfelelő sorrendbe rakva az y szót adják. Adjunk algoritmust, ami x-ben az összes ilyen i helyet $O(n)$ lépésben meghatározza!

20. **[ZH: 2002. április 8.]** Adottak a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ különböző egész számok. Ezeket szeretnénk nagyság szerint rendezni növekvő, vagy csökkenő sorrendbe úgy, hogy a szokásos összehasonlítás helyett, most a következő kérdéseket lehet feltenni: *Három kiválasztott elem közül melyik a középső?* Bizonyítsuk be, hogy a leghatékonyabb algoritmus $\Theta(n \log_2 n)$ összehasonlítást használ!