

Algel II. gyakorlat

Dinamikusak vagyunk

2011. február 14.

1. Oldjuk meg a hátizsák-problémát (azaz töltsük ki a megfelelő táblázatot) az alábbi konkrét esetben:

Legyen $n = 4$, a tárgyak súlyai $s_1 = 7, s_2 = 5, s_3 = 4, s_4 = 1$ és értékei $v_1 = 20, v_2 = 14, v_3 = 10, v_4 = 1$, a súlykorlát $b = 10$.

2. **[ZH: 2008. március 28.]** Egy $n \times n$ méretű táblázat minden eleme egy egész szám. A táblázat bal alsó sarkából akarunk eljutni a jobb felső sarkába úgy, hogy egy lépésben a táblázatban vagy felfelé vagy jobbra egyet lépünk. Azt szeretnénk, hogy a lépegetés során látott elemek növekvő sorrendben kövessék egymást. Egy ilyen út értéke a benne szereplő számok összege. Adjunk $O(n^2)$ futási idejű algoritmust, ami meghatározza, hogy az adott táblázatban a szabályok szerinti utak értékei között mekkora a legnagyobb!
3. Adott egy fa, melynek csúcsaihoz súlyok vannak rendelve. Adjunk lineáris algoritmust, ami meghatározza a fában található maximális súlyú független ponthalmaz súlyát!
4. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Egy n és egy m karakterből álló szövegben meg akarjuk találni a legnagyobb azonos darabot, azaz ha az egyik szöveg $a_1a_2 \cdots a_n$ és a másik $b_1b_2 \cdots b_m$, akkor olyan $1 \leq i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$ indexeket keresünk, hogy

$$a_{i+1} = b_{j+1}, a_{i+2} = b_{j+2}, \dots, a_{i+t} = b_{j+t}$$

teljesüljön a lehető legnagyobb t számra. Adjunk erre a feladatra $O(mn)$ lépést használó algoritmust!

-
5. **[Vizsga: 2007. május 29.]** Legyen $w = w_1w_2 \cdots w_n$ egy n betűből álló szó. Hívjuk részsónak w egy tetszőleges $w_iw_{i+1} \cdots w_{i+k}$ darabját ($1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq n-i$). Adjunk algoritmust, ami $O(n)$ lépésben meghatározza az összes a -val kezdődő és b -re végződő részsó számát.
 6. Az $1, 2, \dots, n$ számoknak adott két permutációja, x_1, \dots, x_n és y_1, \dots, y_n . A két sorozat egy közös részsorozata egy $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, és egy $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ indexsorozattal adható meg, ahol $x_{i_m} = y_{j_m}$ teljesül minden $1 \leq m \leq k$ esetén. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami az x és y sorozatokban meghatároz egy leghosszabb közös részsorozatot!
 7. Egy játékban egy $n \times m$ rács bal felső sarkából kell eljutnunk a jobb alsó sarokba. Egy lépés során a rács mentén vízszintesen vagy függőlegesen tudunk a következő rácpontba lépni. Azonban van néhány kereszteződés, ahova nem szabad lépnünk. Ezek helyét az R tömb írja le, $R[i, j] = 1$, ha az (i, j) kereszteződésbe nem léphetünk, egyébként $R[i, j] = 0$. Adjunk $O(nm)$ futási idejű algoritmust annak meghatározására, hogy pontosan $n + m - 2$ lépést téve a rácson hányféleképpen tudjuk a célt elérni!
 8. Legyenek a_1, a_2, \dots, a_n tetszőleges egész számok és $m < n^2$ egész. Adjunk algoritmust, amely a bináris alakjukkal megadott a_1, a_2, \dots, a_n és m számokról eldönti polinom időben, hogy az a_1, a_2, \dots, a_n számok közül kiválasztható-e néhány úgy, hogy az összegük m -mel osztva egyet adjon maradékul!
 9. Adjunk algoritmust, ami egy n csúcsú fában lineáris időben meghatározza a fában levő leghosszabb út hosszát!
 10. **[Vizsga: 2009. június 11.]** A véges hosszú 0-1 sorozatok egy részét valamilyen szempontból jónak tekintjük, a többit rossznak. Van egy A algoritmusunk, mely adott n hosszú 0-1 sorozatról $O(\log(n!))$ lépésben megmondja, hogy a sorozat jó vagy rossz.

Adjon olyan eljárást, mely A -t felhasználva, ha adott egy m hosszú 0-1 sorozat, $y = y_1 y_2 \cdots y_m$, akkor eldönti, hogy y előáll-e néhány jó sorozat egymás után fűzéséből. Az eljárás lépésszáma összesen legyen $O(m^4)$.

Segítség: $\log(n!) \approx O(n \log n) = O(n^2)$.

11. Egy n szóból álló szöveget kell sorokra tördelni. A szöveg i -edik szava ℓ_i karakterből áll, egy sor s karakter hosszú. Ha egy sor a szöveg i -edik szavával kezdődik és a j -edik szóval végződik, akkor az elválasztó szóközöket is figyelembe véve $t = s - (\ell_i + \ell_{i+1} + \cdots + \ell_j + j - i)$ üres hely marad a sor végén. Egy ilyen sor hibája legyen t^2 . A tördelés hibája a nem üres sorok hibáinak összege. Adjunk $O(n^2)$ lépéses algoritmust egy legkisebb hibájú tördelés meghatározására! (A szavak sorrendje rögzített.)
12. Adottak M_1, M_2, \dots, M_n munkák H_1, H_2, \dots, H_n határidőkkel és P_1, P_2, \dots, P_n profitokkal. Mindegyik munka elvégzése pontosan 1 napunkba kerül (egy napon csak egy munkát végezhetünk el). Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy mely munkákat vállaljuk el a profit maximalizálása érdekében!