Algel I. gyakorlat

Barátkozás a tárggyal és egymással

2011. február 7.

18. **Bizonyítsuk be, hogy**

    (a) $\log_2 f(n) = \Theta(\log_{100} f(n)) \quad (f(n) > 0)$
    $\log_2 f(n) = \frac{\log_{100} f(n)}{\log_{100}(2)} = c \cdot \log_{100} f(n)$. Innen kiadódik mindkettő.

    (b) $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0 \quad (a_k \neq 0) \quad \Rightarrow \quad f(n) = \Theta(n^k)$
    O: $\sum a_i n^i \leq c \cdot n^k$ kell. $n^k (> 0)$ osztással $a_k + \sum a_i \frac{1}{n^{i-k}} \leq c$, amiből már könnyű látni (analízis).
    Ω: teljesen hasonlóan.

    (c) $2^{n+1} = O(2^n)$, de $2^{2n} \neq O(2^n)$
    $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, ahonnan az első triviális.
    Tfh $2^{2n} = O(2^n)$. Ekkor $n > n_0$ esetén $2^{2n} \leq c \cdot 2^n$, ahonnan egy osztással $2^n \leq c$. Ez nyilvánvalóan nem lehetséges.

    (d) $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n)) \quad (f(n), g(n) > 0)$
    $\max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n)$, ezért O triviálisan adódik. $\max(f(n), g(n)) \geq \frac{f(n)+g(n)}{2} = c \cdot (f(n) + g(n))$, ahonnan Ω adódik.

19. **Igaz-e, hogy**

    (a) ha $f = O(g)$ és $g = O(h)$, akkor $f = O(h)$
    $f \leq c_f \cdot g \leq c_f \cdot (c_g \cdot h) = c' \cdot h$ ($n > \max(n_f, n_g)$ esetén), tehát igaz.

    (b) ha $f = \Omega(g)$ és $g = \Omega(h)$, akkor $f = \Omega(h)$
    $f \geq c_f \cdot g \geq c_f \cdot (c_g \cdot h) = c' \cdot h$ ($n > \max(n_f, n_g)$ esetén), tehát igaz.

20. **Tudjuk, hogy $f(x) = O(h(x))$ és $g(x) = O(h(x))$. Igaz-e, hogy**

    (a) **ha $h(x) = 3x$, akkor $f(g(x)) = O(h(x))$**
    $x > \max(n_f, n_g)$ esetén $f(g(x)) \leq c_f \cdot 3g(x) \leq c_f \cdot 3 \cdot c_g \cdot 3x \leq c' 3x = c' h(x)$.

    (b) **$f(g(x)) = O(h(x))$ $\forall h$ függvényre**
    Ellenpélda: $f(x) = x^2, g(x) = x^3, h(x) = x^4$, ebből $f(g(x)) = (x^3)^2 = x^6$. Látszik, hogy a feltétel teljesül, viszont $x^6 \neq O(x^4)$.

21. **Az alábbi függvényeket rendezzük olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!**

    $$f_1(n) = 8n^{2.5}, \quad f_2(n) = 5\sqrt{n} + 1000n, \quad f_3(n) = 2^{\log^2 n}, \quad f_4(n) = 2008n^2 \log n$$

    $f_2 = O(f_4) = O(f_1) = O(f_3)$. Ez három számolás, nem írom le. Amit bizonyítás nélkül fel lehet hozzá használni: $\log n \leq c \cdot \sqrt{n}$.

22. **Az $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n^2)$. Lehetséges-e, hogy**

    (a) **$\forall n$ hosszú bemeneten $O(n)$ lépést használ?**
    Természetesen, hiszen a definíciónak nem mond ellent.

    (b) **$\exists x$, hogy az x bemeneten az algoritmus lépésszáma $10|x|^2 \log|x| - 800$ (ahol $|x|$ az x bemenet hosszát jelöli)?**
    Természetesen, hiszen ha $x < n_0$, akkor bármi lehet.

23. **[Vizsga: 2007. június 19.] Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!**

$$f_1(n) = 2^{100n} - 2^{50n}, \quad f_2(n) = 2007n^3, \quad f_3(n) = 3^{3n}$$

Megsejtjük, hogy $f_2(n) = O(f_3(n)) = O(f_1(n))$. Most bebizonyítjuk, definíció szerint.

$f_2(n) = O(f_3(n))$: $\exists c > 0, n_0 > 0$, hogy $\forall n > n_0$ $2007n^3 \leq c(3^{3n})$. Ezt átalakítva, konstanst hozzávéve c-hez $n^3 \leq c \cdot 27^n$, aminek az igazságát már nem kell bizonyítani, triviálisnak tekinthető.

$f_3(n) = O(f_1(n))$: $\exists c > 0, n_0 > 0$, hogy $\forall n > n_0$ $3^{3n} \leq c(2^{100n} - 2^{50n})$. Írhatjuk, hogy $3^{3n} \leq c2^{50n}(2^{50n} - 1)$, és mondjuk logaritmust vonva $n \log 27 \leq c' + n \log 2^{50} + \log(2^{50} - 1) = c' + 50n + \log(2^{50} - 1)$. A kifejtetlen tag biztos pozitív, így ez biztosan igaz bármely $n > 0$ és $c \geq 0$ esetén.

Számolás nélkül, nem definíció szerint nem lehet max. pontot kapni!

24. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Egy $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy

    (a) **van olyan x bemenet, amin a lépésszáma $|x|^3$?**
    Természetesen lehet ilyen, pl. ha $|x| < n_0$.

    (b) **minden x bemeneten legfeljebb $2007|x|$ lépést használ?**
    Lehet, hiszen $2007|x| = O(|x|) = O(|x| \log |x|)$.

    (Szokás szerint $|x|$ az x szó hosszát jelöli.)

25. **[Vizsga: 2007. június 5.] Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n = 2k > 4$ páros számra $L(2k) \leq L(2k-2) + 1$ teljesül, és hogy $L(4) = 10$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n)$?**
Nem következik, hiszen a páratlan n-ekről semmit sem tudunk, ott lehet akár 2^n is.

26. **Jelöljük $T(n)$-nel egy algoritmus legnagyobb lehetséges lépésszámát az n méretű inputokon. Tudjuk, hogy $T(n) \leq 10$, ha $n \leq 5$ és $T(n) \leq T(n-1) + n/3$, ha $n > 5$. Ekkor mit tudunk mondani $T(n) = O(n)$, $T(n) = O(n^2)$ és $T(n) = O(n^3)$ egyenlőségek helyességéről?**
A „favágó” megoldás:

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq T(n-1) + \frac{n}{3} \leq T(n-2) + \frac{n}{3} + \frac{n-1}{3} \\
&\leq \cdots \leq T(5) + \frac{1}{3}(n + (n-1) + \cdots + (n - (n-6))) \\
&= T(5) + \frac{1}{3}(\sum_{i=1}^{n} i - (1+2+3+4+5)) = T(5) + \frac{n(n+1)}{6} - 5 \\
&\leq 10 - 5 + \frac{n(n+1)}{6} = 5 + \frac{n(n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Innen egyszerű bizonyítani $O(n^2)$-et, ahonnan $O(n^3)$ is rögtön adódik. $O(n)$-ről nem tudunk semmit, nincs kizárva, de nem is bizonyítható (Vigyázat! Ha $\leq$ helyett $=$ lenne, akkor már nem ez lenne a helyzet!).

Az „elegáns” megoldás (Vigyázat! Sok veszély!):
$O(n^2)$-et bizonyítjuk. $n_0 = 5$-re és $c = 1$-re igaz, mert $T(5) \leq 10 \leq 1 \cdot 5^2 = 25$. Indukcióval tfh valamilyen $n >= 5$-re igaz (azaz $T(n) \leq c \cdot n^2 = 1 \cdot n^2$), belátandó, hogy $n+1$-re is.

$$T(n+1) \leq T(n) + \frac{n+1}{3} \leq c \cdot n^2 + \frac{n+1}{3} = 1 \cdot n^2 + \frac{n+1}{3} \leq n^2 + n + 1 \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = c \cdot (n+1)^2,$$

pont amit bizonyítani akartunk. **Figyelem!** Itt a konstanst rögzíteni kell előre, nem bánhatunk vele olyan lazán, mint a normál bizonyításoknál! Végig **ugyanaz** a c szerepel (jelen esetben 1-re rögzítve, más feladatnál lehet más). Az egyszerűséget az adta, hogy felső becsléseket simán adhatunk (n helyett $2n$-t írunk, stb.). Ezzel viszont pl. $O(n)$-t akkor sem lehetne ilyen simán kizárni, ha $T(n)$ definícióban $\leq$ helyett $=$ lenne.